Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

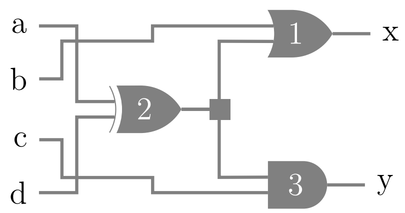
9. Dezember 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Präsenzübung 8
12. Dezember - 16. Dezember 2016
(Dieser Übungszettel enthält 5 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (Netzwerke)
Betrachten Sie das Netzwerk in der unteren Abbildung und beantworten Sie die nachfolgenden Fragen.
Hinweis: Ein XOR-Gatter  realisiert die aussagenlogische Formel $(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ für Inputsignale a und b.



1. Modellieren Sie x und y als aussagenlogische Formeln mit Variablen a, b, c, d.

2. Die Gatter 1, 2 und 3 sind jeweils (unabhängig voneinander) mit Wahrscheinlichkeit ϵ fehlerhaft. Dass ein Gatter fehlerhaft ist, bedeutet hierbei, dass seine Ausgabe negiert wird.

   Wir betrachten den Zufallsprozess, der bestimmt, welche der Gatter fehlerhaft sind. Wir beschreiben die zugehörige Ergebnismenge durch $\Omega = \{0,1\}^3$. Das Ereignis $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ beschreibt, welche der Gatter fehlerhaft sind. Falls $\omega_i = 1$ ist, dann ist Gatter i fehlerhaft. Falls $\omega_i = 0$ ist, dann ist das Gatter i nicht fehlerhaft.

   Sei $\epsilon = 0.1$. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit jedes möglichen Ereignisses.

3. Sei nun die Netzeingabe $(a, b, c, d) = (1, 0, 1, 0)$ fest. Modellieren Sie x und y als aussagenlogische Formeln mit Variablen $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

4. Bestimmen Sie für jedes Ereignis ω den Wert von x und y.

5. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}(X = 1)$ und $\mathbf{P}(Y = 1)$, wobei X und Y zwei Zufallsvariablen mit $X : \Omega \to \{0,1\}, X(\omega) = x$ bzw. $Y : \Omega \to \{0,1\}, Y(\omega) = y$ sind.

6. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung $f(x, y)$ von X und Y

7. Bestimmen Sie das Produkt der Randverteilung $f_1(x)f_2(y)$.

Aufgabe 2 (Gemeinsame und Paarweise Unabhängigkeit)

1. Ein fairer Würfel wird dreimal hintereinander geworfen. Die Ereignisse A, B, C seien wie folgt definiert:
   - $A \hat{=}$ der erste Wurf ist eine 6,
   - $B \hat{=}$ die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist gerade,
   - $C \hat{=}$ mindestens eine der gewürfelten Augenzahlen ist eine 3.

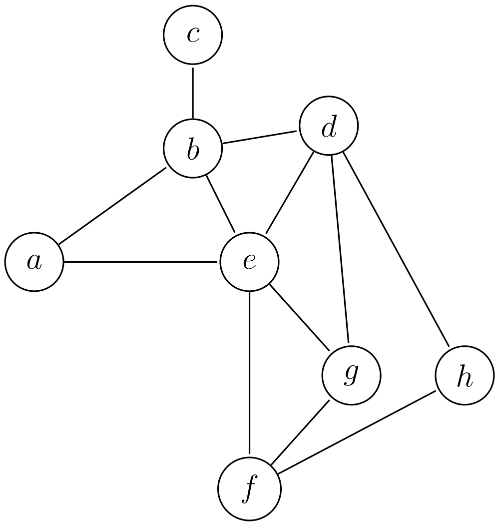
   Überprüfen Sie jedes Paar von Ereignissen auf Unabhängigkeit. Stellen Sie ferner fest, ob alle drei Ereignisse unabhängig sind.

2. Jetzt wird ein fairer Würfel zweimal hintereinander geworfen. Die Ereignisse A, B, C seien dabei wie folgt definiert:
   - $A \hat{=}$ die Augenzahl beim ersten Wurf ist gerade,
   - $B \hat{=}$ die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade,
   - $C \hat{=}$ beim zweiten Wurf fällt eine Primzahl.

   Überprüfen Sie jedes Paar von Ereignissen auf Unabhängigkeit. Stellen Sie ferner fest, ob alle drei Ereignisse unabhängig sind.

Aufgabe 3 (Diskrete Wahrscheinlichkeit)
Ein Hersteller weiß, dass 2% seiner Produkte vor der Endkontrolle noch Fehler aufweisen. In der Endkontrolle wird ein fehlerhaftes Produkt mit einer Wahrscheinlichkeit von 96% entdeckt. Ein fehlerfreies Produkt wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% als defekt eingestuft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Produkt als fehlerhaft eingestuft wird? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als fehlerfrei eingestuftes Produkt wirklich in Ordnung ist?

Aufgabe 4 (Darstellung, Begriffe, Wegprobleme)
Gegeben sei der Graph G:



1. Beschreiben Sie den ungerichteten Graph G als Tupel $G = (V, E)$ mit einer Menge von Knoten V und einer Menge von Kanten E.

2. Geben Sie den Grad $\deg(v)$ jedes Knotens $v \in V$ an.

Aufgabe 5 (Graphen,Modellierung)

1. Sei S die Menge der Studenten, die an der Vorlesung Modellierung teilnehmen. Manche Studenten sind untereinander befreundet. Wie kann dieser Sachverhalt geeignet durch einen Graphen modelliert werden?

2. Die Bearbeitung der Modellierungsübungszettel darf in Gruppen mit maximal drei Teilnehmern erfolgen. Dabei geben Studenten nur in einer Gruppe ab, wenn sie mit jedem anderen Mitglied der Gruppe befreundet sind.

   Modellieren Sie die folgende Frage mittels des Graphen aus der vorherigen Teilaufgabe: Gibt es Studenten, die die Voraussetzungen für eine Abgabe in einer Gruppen mit 3 Mitgliedern erfüllen?

3. Um von jemandem Lösungen zu kopieren, ist erfahrungsgemäß keine Freundschaft notwendig. Damit $x \in S$ von $y \in S$ die Lösung kopieren kann, reicht es aus, wenn x mit jemandem befreundet ist, der mit jemandem befreundet ist, der mit jemanden befreundet ist, ..., der mit y befreundet ist.

   Wie kann man die Frage, ob x von y Lösungen kopieren kann, mittels des Graphen aus der ersten Teilaufgabe modellieren?

4. Nun nehmen wir an, dass $K \subseteq S$ die Teilmenge der sehr klugen Studenten ist, in der jeder Student jeweils alle Aufgaben lösen kann.

   Wie kann man die Frage, ob jeder Student durch Kopieren der gesamten Lösung volle Punktzahl erreichen könnte, mittels des Graphen aus der ersten Teilaufgabe modellieren?