Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

11. November 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Präsenzübung 4
14. November - 18. November 2016
(Dieser Übungszettel enthält 4 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (Beweistechniken)
Betrachten Sie folgenden Satz:
Seien $p, q \in \mathbb{N}$ zwei verschiedenen Primzahlen mit $p, q \notin \{2, 3\}$. Dann gilt $|p - q| > 1$.

1. Benennen Sie die zwei Elemente der allgemeinen Satzform und zerlegen Sie dann den obigen Satz in diese Elemente.
2. Identifizieren Sie die einzelnen Aussagen
3. Beweisen Sie den Satz indirekt.

Aufgabe 2 (Beweistechniken)
In der Vorlesung haben Sie bereits den Indirekten Beweis und den Induktionsbeweis kennengelernt. Eine weitere Beweistechnik ist die Kontraposition. Anstatt die Implikation $A \to B$ zu beweisen, wird der Umkehrschluss $\neg B \to \neg A$ Bewiesen.

1. Erläutern Sie, warum es sich um einen direkten und keinen indirekten Beweis handelt.
2. Beweisen Sie den Satz aus Aufgabe 1 mit Hilfe der Kontraposition und eräutern sie, wo sich dieser vom Beweis durch Widerspruch unterscheidet.

Aufgabe 3 (Horn-Formeln,Unit-Resolution)

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln Horn-Formeln sind.
   a) $\alpha = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B)$.
   b) $\alpha = (\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (A \wedge (C \vee \neg B))$.
   c) $\alpha = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge \neg A$
2. Gegeben Sei eine Horn-Formel α, die keine Klauseln mit weniger als 2 Literalen enthält. Zeigen Sie, dass α dann erfüllbar ist.

3. Gegeben sei jeweils die Menge M an aussagenlogischen Formeln und die Formel β. Prüfen Sie, ob $M \models \beta$ gilt. Stellen Sie dazu die äquivalente Horn-Formel auf und wenden Sie gegebenenfalls Unit-Resolution an.
   a) $M = \{(A \vee B \wedge C) \to (C \wedge \neg D), (C \wedge D) \to A, (C \vee B) \to A\}$, $\beta = \neg A \wedge B$.
   b) $M = \{(A \vee B) \to C, (C \vee D) \to E, (A \wedge E) \to B\}$, $\beta = A$.
   c) $M = \{(A \vee B) \to C, (C \vee D) \to E, (A \wedge E) \to B\}$, $\beta = \neg A$.

Aufgabe 4 (Formeln, Prädikatenlogik)
Gehen Sie für jede der unten gegebenen Formeln folgendermaßen vor:

(a) Handelt es sich um eine Formel in PL1? Wenn nicht, dann begründen Sie warum. Wenn ja, dann bearbeiten Sie die Aufgabenteile (b), (c) und (d) für diese Formel.

(b) Kennzeichnen Sie alle freien Variablen.

(c) Kennzeichnen Sie alle gebundenen Variablen, indem Sie diese mit dem dazugehörigen Quantor verbinden.

(d) Geben Sie jeweils eine mögliche Interpretation an. Wählen Sie dazu einen Grundbereich ω und ordnen Sie den Elementen aus Σ und V Objekte der richtigen Stelligkeit über dem Grundbereich ω zu.

(e) Führen Sie eine konsistente Umbenennung durch.

Gegeben sind die folgenden Formeln.

1. $\exists s \forall s \ \Big(P(s) \wedge R(t)\Big)$
2. $\exists x \forall y \ (Q(x, y)) \wedge \exists x \ P(x, y)$
3. $P(x) \to \forall x \ \Big(\exists x, y \ \Big(\neg R(a, y) \wedge \Big(S(z, Q(x))\Big) \wedge \Big(T(y) \wedge P(y)\Big)\Big)\Big)$
4. $\forall x \forall y \ \Big(G\Big(k(f(x, y)), f(k(x), k(y))\Big) \wedge G\Big(k(f_2(x, y)), f(k(x), k(y))\Big)\Big)$
5. $\forall s \ \Big(\exists t \ (P(s) \wedge t(s))\Big)$
6. $\forall x \ (P(x, y) \vee \exists \neg y \ P(x, y))$
7. $\exists x \exists y \ \Big(\Big(P(x) \to \forall x \ (Q(x, y, z))\Big) \to \exists S(x, y)\Big)$