Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

28. Oktober 2016

# Modellierung – WS 2016/2017

**Präsenzübung 2**
**31. Oktober - 4. November 2016**
(Dieser Übungszettel enthält 8 Aufgaben)

*Hinweis:* In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

**Aufgabe 1** (Relationen, Graphen, Funktionen)
Gegeben sei die Menge

$$R = \{(i,j) \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,9\}^2 \mid j = i^2\}$$

aus Präsenzübung 1 als Relation.

1. Stellen sie den Graphen $G_R$, der die Relation $R$ repräsentiert, grafisch dar.

Wir betrachtet nun die Erweiterung von $R$ auf $\mathbb{Z}$

$$R_{\mathbb{Z}} = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j = i^2\}.$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie: Die Relation $R_{\mathbb{Z}}$ ist eine Funktion.

**Aufgabe 2** (Relationen, Eigenschaften)
Begründen Sie, welche der folgenden Eigenschaften die als Matrix dargestellten Relationen aufweisen und welche nicht: Reflexivität, Irreflexivität, Symmetrie, Asymmetrie, Alternativität.

| $R_a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | | | | + | |
| 2 | | + | | | | + |
| 3 | + | | + | | | |
| 4 | | + | | + | | |
| 5 | | | + | | + | |
| 6 | | | | + | | + |

| $R_b$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | + | | | |
| 2 | | | | + | | |
| 3 | | + | | | | |
| 4 | + | | | | | |
| 5 | | | | | | + |
| 6 | | | | | + | |

| $R_c$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | + | | | | |
| 2 | + | | + | | | |
| 3 | | + | | + | | |
| 4 | | | + | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | + |

**Aufgabe 3** (Relationen)

1. Gegeben sei die Relation $R := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y = x^2 \wedge x \leq 6\} \in Pow(\mathbb{N}^2)$. Geben Sie die Relation $R$ in extensionaler Schreibweise an. Geben Sie an, ob die Relation reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv oder alternativ ist.

2. Anja, Horst und Dieter müssen an einigen Wochentagen zur Uni, an anderen haben sie frei. Aus welcher Obermenge stammen Relationen, die so eine Zuordnung modellieren. Geben Sie ein Element aus dieser Menge an.

3. Seien $M$ und $N$ beliebige endliche Mengen mit $|M| = m, |N| = n$. Wie viele Relationen über $M \times N$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 4** (Funktionen konstruieren)

1. Geben Sie eine Relation an, die keine Funktion ist.

2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen total, partiell, injektiv, surjektiv oder bijektiv sind ($D$ ist der Definitionsbereich, $B$ der Bildbereich):
   a) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$
   b) $f(x) = x^2$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^{\geq 0}$
   c) $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}^{\geq 0}$
   d) $f(x) = \frac{1}{x}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$

**Aufgabe 5** (Wahrheitstafel, Äquivalenz)
Seien $\alpha, \beta, \gamma$ aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie die folgende Äquivalenzen mit Hilfe von Wahrheitstafeln. Fügen Sie in die Tafeln Spalten für sinnvolle Teilformeln ein.

1. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \approx (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

2. $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$

**Aufgabe 6** (Beweisen / Widerlegen)
Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Zu jeder erfüllbaren Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom mit $f$ bewertet.

2. Zu jeder tautologischen Formel gibt es eine erfüllende Bewertung, die mindestens ein Atom mit $w$ bewertet.

3. Wenn $\alpha \approx \beta$, dann $\neg\alpha \approx \neg\beta$.

**Aufgabe 7** (Wahrheitstafel, Erfüllbarkeit)
Prüfen Sie, ob die folgenden Formeln tautologisch, widerspruchsvoll, erfüllbar oder falsifizierbar sind.

1. $\neg(A \lor B) \lor \neg B$
2. $((A \lor C) \land \neg B) \to (\neg A \lor (B \land C))$
3. $\neg(((\neg A \to B) \land \neg B) \to (\neg A \land \neg(A \to B)))$

Falls Sie dazu Wahrheitstafeln nutzen, fügen Sie in diese Spalten für sinnvolle Teilformeln ein. Falls Sie dazu die Umformungsregeln der boolschen Algebra nutzen, geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendete Regel an und markieren Sie, welche Teilformel Sie umformen.

**Aufgabe 8** (Modellierung, semantische Folgerung)
Gegeben seien folgende Elementaraussagen:

**L:** Lösungsblatt wird veröffentlicht.

**N:** Das Netz ist kaputt.

**W:** Wir sind mit der Lösung einverstanden.

**S:** Der Server ist kaputt.

**A:** Wir können arbeiten.

**Z:** Der Dozent hat die Zentralübung schon gehalten.

1. Formalisieren Sie folgende umgangssprachliche Aussagen:
   a) Das Lösungsblatt wird nur veröffentlicht, wenn das Netz nicht kaputt ist und wir mit der Lösung einverstanden sind.
   b) Wir können nur arbeiten, wenn weder der Server noch das Netz kaputt ist.
   c) Wenn das Lösungsblatt veröffentlicht wird, dann hat der Dozent die Zentralübung schon gehalten.
2. Die Menge der in (1) entwickelten Formeln sei im folgenden $\mathcal{A}$ genannt. Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Aussagen semantische Folgerungen von $\mathcal{A}$ sind:
   a) Das Lösungsblatt wird nicht veröffentlicht oder das Netz ist nicht kaputt.
   b) Das Lösungsblatt wird nur veröffentlicht, wenn wir mit der Lösung einverstanden sind und der Dozent die Zentralübung schon gehalten hat.
   c) Der Server ist nicht kaputt und wir können arbeiten.

   Falls Sie die Umformungsregeln der boolschen Algebra nutzen, geben Sie bei jedem Umformungsschritt die verwendete Regel an und markieren Sie, welche Teilformel Sie umformen.