Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

3. Februar 2017

Modellierung – WS 2016/2017

Präsenzübung 14
6. Februar - 10. Februar 2017
(Dieser Übungszettel enthält 8 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (regulärer Ausdruck, NFA)
Gegeben ist der reguläre Ausdruck

$$R = a(aa|bb)^*(aa^*|bb^*) \ .$$

Konstruieren Sie einen NFA, der genau $L(R)$ akzeptiert.

Aufgabe 2 (Potenzmengenkonstruktion)
Sei $N = (\{0,1\}, \{q_0, q_1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ ein nicht-deterministischer endlicher Automat (NFA). Die Übergangsfunktion δ sei dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, 0) &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_0, 1) &= \{q_1\} \\
\delta(q_1, 0) &= \emptyset \\
\delta(q_1, 1) &= \{q_0, q_1\}
\end{aligned}$$

Konstruieren Sie den zu N entsprechenden deterministischen endlichen Automaten (DFA) A gemäß der in der Vorlesung vorgestellten Potenzmengenkonstruktion.

Aufgabe 3 (Pumping Lemma)
Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält doppelt so viele 0en wie 1en}\} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 4 (Grammatik, NFA, Potenzmengenkonstruktion)
Gegeben sei folgende Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$ mit

$$
\begin{array}{rclllll}
P & = & \{ & \text{S} & ::= & \text{0A}, & \\
 & & & \text{A} & ::= & \text{0A}, & \\
 & & & \text{A} & ::= & \text{1A}, & \\
 & & & \text{A} & ::= & \text{1B}, & \\
 & & & \text{B} & ::= & \text{0}, & \\
 & & & \text{B} & ::= & \text{1} & \}
\end{array}
$$

1. Entwerfen Sie einen nichtdeterministischen endlichen Automaten N, der genau die Sprache $L(G)$ akzeptiert.
2. Konstruieren Sie aus N mit der Potenzmengenkonstruktion einen deterministischen endlichen Automaten A. Zeichnen Sie A nicht, sondern geben Sie die Übergangsfunktion δ_A des Automaten in tabellarischer Form an.

Aufgabe 5 (Pumping Lemma)
Gegeben ist die Sprache

$$L = \{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\} \ .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 6 (Wiederholung, Beweise)
Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Tribonacci-Zahl T_n als

$$T_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \in \{1, 2, 3\} \\ T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweisen Sie per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$T_n < 2^n \ .$$

Aufgabe 7 (Wiederholung, Beweise)
Eine Brückenkante eines Graphen ist eine Kante, deren Entfernen zu einem Graphen führt, der mehr Zusammenhangskomponenten enthält als der ursprüngliche Graph.
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender ungerichteter Graph. Zeigen Sie für alle $e \in E$:

e ist eine Brückenkante $\Leftrightarrow$ e ist in jedem Spannbaum von G enthalten.

Aufgabe 8 (Wiederholung, Beweise)
Betrachten Sie die folgende Definition der Mengen QN und QZ

$$QN = \{q \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n^2 = q\}$$
$$QZ = \{q \in \mathbb{R} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : z^2 = q\} \ .$$

Beweisen Sie, dass $QN = QZ$.