Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

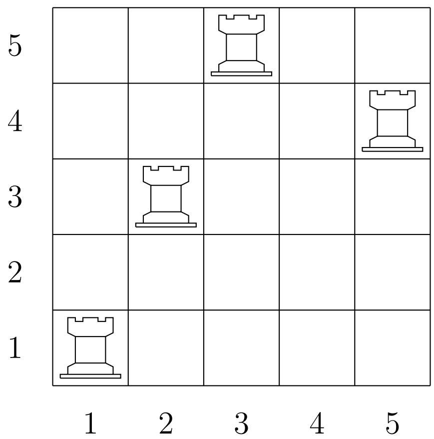
6. Januar 2017

Modellierung – WS 2016/2017

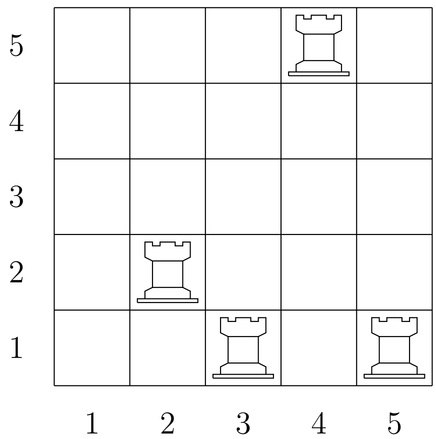
Präsenzübung 10
9. Januar - 13. Januar 2017
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung “Musterlösungen“ zu verteilen.

Aufgabe 1 (Modellieren, Aussagenlogik)
Im Folgenden betrachten wir das *Turmproblem*. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir ein $n \times n$ Spielfeld. Wir bezeichnen eine Platzierung von *Türmen* auf dem Spielfeld als *legal*, wenn in jeder Zeile und jeder Spalte des Spielfeldes höchstens ein Turm steht.



Eine legale Platzierung von 4 Türmen auf einem 5×5 Spiefeld.



Eine nicht legale Platzierung von 4 Türmen auf einem 5×5 Spiefeld.

1. Modellieren Sie das Turmproblem mit Hilfe der Aussagenlogik, indem Sie eine aussagenlogische Formel angeben. Verwenden Sie dafür Variablen T_{ij}, wobei T_{ij} bedeuten soll, dass auf dem Feld (i, j) ein Turm steht. Die Formel sollte genau dann von einer Interpretation erfüllt werden, wenn diese eine legale Platzierung von Türmen darstellt.

2. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$. Wie viele legale Platzierungen von k Türmen gibt es?

Aufgabe 2 (Graphen, einfache Definitionen)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $u, v \in V$. Zeigen Sie, dass es einen Weg von u nach v genau dann gibt, wenn es einen Pfad von u nach v gibt.

Aufgabe 3 (Kreise in Graphen)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G_n = (\{1, \dots, n\}, E)$ mit

$$E = \{\{i, i+1\} \subset \mathbb{N} \mid i < n\} \cup \{\{i, 2i\} \subset \mathbb{N} \mid i \leq n/2\} \ .$$

1. Besitzt G einen Eulerweg?
2. Besitzt G einen Eulerkreis?
3. Besitzt G einen Hamiltonweg?
4. Besitzt G einen Hamiltonkreis?

Aufgabe 4 (Modellieren)
Fabian und seine Freunde wollen zusammen den neuen War Stars Film völlig legal bei Fabian daheim schauen. Jeder muss sich nun einen der 7 Sitzplätze auf dem Sofa aussuchen. Wir bezeichnen die Menge der Freunde mit $F = \{f_1, \dots, f_6\}$ und die Menge der Sitzplätze mit $S = \{s_1, \dots, s_7\}$. Wer welchen Sitzplatz mag, ist in der folgenden Tabelle angegeben. Dabei bedeutet ein Eintrag "✓" in Zeile i und Spalte j, dass f_i den Sitzplatz s_j mag. Der Eintrag "$-$" bedeutet, dass f_i den Sitzplatz s_j nicht mag.

		Sitzplatz						
		s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Fabian	(f_1)	-	-	-	✓	-	-	✓
Jakob	(f_2)	✓	-	-	✓	-	✓	-
Gennadij	(f_3)	-	✓	✓	-	✓	-	-
Sascha	(f_4)	-	-	-	✓	-	✓	-
Nils	(f_5)	✓	✓	-	-	✓	-	-
Peter	(f_6)	✓	-	-	-	-	✓	✓

Modellieren Sie den in der Tabelle angegebenen Sachverhalt als bipartiten ungerichteten Graphen $G = (A \uplus B, E)$.

1. Geben Sie an, wie die Mengen A und B definiert sind. Erklären Sie, wann eine Kante $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ in E enthalten ist.
2. Jeder soll nun genau einen Sitzplatz auswählen, den er mag. Ein Sitzplatz darf dabei nicht mehrfach ausgewählt werden.

   Geben Sie eine Teilmenge von E an, die eine Zuordnung beschreibt, die diese Anforderung erfüllt.
3. Die Situation ändern sich, als Fabians Katze den Sitzplatz s_1 auswählt.

   Zeigen Sie: Es ist jetzt nicht mehr möglich, jedem $f_i \in F$ genau ein $s_j \in S \setminus \{s_1\}$ zuzuweisen, so dass jeder seinen zugewiesenen Sitzplatz mag und auf jedem Sitzplatz nur einer der Freunde sitzt.

Aufgabe 5 (Beweis)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

a) G ist ein Baum.

b) G ist zusammenhängend und für alle $e \in E$ ist $G' = (V, E \setminus \{e\})$ nicht zusammenhängend.

c) G ist kreisfrei und für alle $\{u, v\} \in \binom{V}{2}$ mit $\{u, v\} \notin E$ enthält $G'' = (V, E \cup \{\{u, v\}\})$ einen Kreis.

Aufgabe 6 (Graphen, Induktionsbeweise)
Betrachten Sie folgende Behauptung:
Behauptung: Für alle (ungerichteten) Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ gilt: wenn $\deg(v) \geq 1$ für alle $v \in V$, dann ist G zusammenhängend.

a) Stimmt die Behauptung?

b) Wo liegt der (sehr grundsätzliche) Fehler in folgendem **fehlerhaften** Beweis?

Beweis per Induktion über die Anzahl Knoten ($n = |V|$).
Induktionsanfang: Für $n = 2$ ist der einzige Graph, in dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat, der vollständige Graph K_2 und der ist zusammenhängend.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \geq 2$ beliebig aber fest. Jeder Graph mit n Knoten, in dem jeder Knoten mindestens Grad 1 hat, ist zusammenhängend.
Induktionsschritt ($n \to n + 1$): Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und $\deg(v) \geq 1$ für alle $v \in V$. Nach Induktionsvoraussetzung ist G zusammenhängend. Wir betrachten nun $G^* = (V^*, E^*) = (V \cup \{v^*\}, E^*)$, der entsteht indem wir einen neuen Knoten $v^* \notin V$ zu G hinzufügen. Da nach Voraussetzung $\deg(v^*) \geq 1$ gilt, gibt es eine Kante $\{v, v^*\} \in E^*$ für ein $v \neq v^*$ (also $v \in V$).
Offensichtlich ist G^* auch zusammenhängend. (Beweisskizze: Weil G zusammenhängend ist gehört v zu derselben Zusammenhangskomponente wie alle anderen $v' \in V$. Wegen der Kante $\{v, v^*\} \in E^*$ gehört auch v^* dazu).