Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

16. Dezember 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 9
Abgabe: 9. Januar 2017 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 8 Aufgaben mit insgesamt 45 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Graphen,Matching) (5 Punkte)
Gegeben seien die Graphen

- $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ und
  $E_1 = \{\{a, d\}, \{f, b\}, \{c, b\}, \{d, c\}, \{a, g\}, \{f, g\},$
  $\{e, a\}, \{f, e\}, \{c, e\}, \{f, d\}, \{c, g\}, \{h, d\}, \{h, e\}\}$
- $G_2 = (V_1, E_2)$ mit
  $E_2 = \{\{d, g\}, \{b, e\}, \{g, a\}, \{c, f\}, \{a, c\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{b, f\}, \{f, d\}\}$

1. Zeichnen Sie die Graphen.
2. Bei welcher der folgenden Mengen handelt es sich jeweils um ein Matching?
   a) $M_1 \cap E_1$ und $M_1 \cap E_2$ mit $M_1 = \{\{a, d\}, \{c, b\}, \{f, g\}, \{f, e\}, \{f, b\}\}$
   b) $M_2 \cap E_1$ und $M_2 \cap E_2$ mit $M_2 = \{\{g, a\}, \{b, e\}, \{a, d\}\}$
3. Geben Sie jeweils ein perfektes Matching der Graphen an, falls ein solches existiert.
4. Welcher der Graphen ist bipartit? Zerlegen Sie gegebenenfalls die Knotenmenge in entsprechende disunkte Teilmengen.
5. Geben Sie jeweils die chromatische Zahl und eine entsprechende Färbung der Graphen an.

Aufgabe 2 (Modellierung) (5 Punkte)
Für sieben Vorlesungen stehen am Semesterende Abschlussklausuren an. Bei der Terminplanung ist darauf zu achten, dass kein Student mehr als eine Klausur pro Tag schreibt. Ein „+“-Eintrag im Feld (i, j) untenstehender Tabelle bedeutet, dass die Vorlesungen i und j mindestens einen Studenten gemeinsam haben - die Klausuren für diese Vorlesungen dürfen also nicht am selben Tag stattfinden.

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+		+	
2	+		+		+		
3		+		+			+
4	+		+			+	
5		+					+
6	+			+			
7			+		+		

1. Durch welches graphentheoretische Problem lässt sich die beschriebene Aufgabe modellieren? Zeichnen Sie den in ihrer Modellierung zur Tabelle gehörenden Graphen.
2. Wie viele Tage sind zur Durchführung aller Klausuren mindestens notwendig?
3. Geben Sie einen möglichen Terminplan an.

Aufgabe 3 (Graphen,Beweisen) (7 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| > 1$.

1. Beweisen Sie: Wenn G ein Baum ist, dann hat jeder Knoten Grad mindestens 1 und für die Summe aller Knotengrade gilt

   $$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2(|V| - 1) \ .$$

   Beweisen Sie diese Gleichheit durch einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Knoten.

   Hinweis: Überlegen Sie was passiert, wenn Sie einen geeigneten Knoten aus einem Baum entfernen.
2. Für welche der zu zeigenden Eigenschaften ist die Bedingungen $|V| > 1$ wichtig?
3. Gilt auch ein „genau dann wenn“? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4 (Graphen, Beweisen) (6 Punkte)
Beweisen Sie, dass ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, in dem jeder Knoten mindestens Grad $(|V| - 1)/2$ hat, zusammenhängend ist.

Aufgabe 5 (Graphen, Beweisen) (4 Punkte)
Sei $a \in \mathbb{N}$ und $G = (A \uplus B, E)$ ein ungerichteter, bipartiter Graph, in dem jeder Knoten $v \in A \uplus B$ denselben Grad $\deg(v) = a$ hat.

Beweisen Sie, dass gilt: $|A| = |B|$.

Aufgabe 6 (Graphen, Beweisen) (6 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph und sei $T = (V, E_T)$ ein Spannbaum von G. Beweisen Sie, dass es zu jeder Kante $e \in E \setminus E_T$ eine Kante $e' \in E_T$ gibt, sodass $T' = (V, (E_T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ ein Spannbaum von G ist.

Aufgabe 7 (Graphen, Beweisen) (6 Punkte)
Betrachten Sie folgende Definition.

Definition 7.1 (Durchmesser) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*
Der Durchmesser *des Graphen G ist gegeben durch*

$$\operatorname{diam}(G) = \max\{d(u,v) \mid u, v \in V\} \ ,$$

wobei für alle $u, v \in V$

$$d(u,v) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid \textit{Es gibt einen Weg der Länge } l \textit{ von } u \textit{ nach } v \textit{ in } G\}\,.$$

Umgangssprachlich ist also der Durchmesser eines Graphen die Länge des längsten kürzesten Weges zwischen zwei Knoten im Graphen.
Beweisen Sie per Induktion über d:

$$\operatorname{diam}(Q_d) = d.$$

Hinweis: Q_d bezeichnet den d-dimensionalen Hyperwürfel.

Aufgabe 8 (Graphen, Beweisen) (6 Punkte)
Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung.

Satz 8.2 *Sei $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$. Der Graph Q_d enthält einen Hamiltonkreis.*