Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

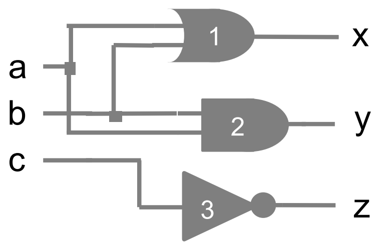
9. Dezember 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 8
Abgabe: 19. Dezember 2016 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben mit insgesamt 32 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Netzwerke) (12 Punkte)
Betrachten Sie den folgenden Schaltkreis:



1. Beschreiben Sie die Ausgaben $x, y, z \in \{0, 1\}$ als aussagenlogische Formeln mit Variablen $a, b, c \in \{0, 1\}$.
2. Nehmen Sie nun an, dass die Gatter unzuverlässlich arbeiten und jedes der Gatter unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $\epsilon = 0.1$ eine falsche Ausgabe liefert.

   Modellieren Sie für die Eingabe $(a, b, c) = (1, 0, 1)$ die Ausgaben als Zufallsvariablen X, Y, Z über einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbf{P})$. Geben Sie die Ereignismenge Ω, das Maß $\mathbf{P}$ sowie die Zufallsvariablen explizit als Funktionen $\Omega \longrightarrow \{0, 1\}$ an.
3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen f_X, f_Y, f_Z der Zufallsvariablen X, Y, Z.
4. Überprüfen Sie die Zufallsvariablen auf paarweise sowie gemeinsame Unabhängigkeit.
5. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}(X = 1 \,|\, Y = 0)$?

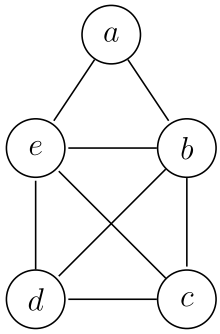
Aufgabe 2 (Bedingte Wahrscheinlichkeit) (3 Punkte)
Zeigen Sie: Ist $(\Omega, \mathbf{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $B \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit $\mathbf{P}(B) > 0$, so ist $(\Omega, \mathbf{P}_B)$ mit $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A|B)$ für alle $A \subseteq \Omega$ wiederum ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Aufgabe 3 (Diskrete Wahrscheinlichkeit) (3 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$.

Definition 3.1 *Für $x \in \{0,1\}^n$ definieren wir $|x|$ als die Anzahl Einsen in x.*

Sei $\Omega = \{0,1\}^n$ und $\mathbf{P}$ die Gleichverteilung auf Ω. Auf $(\Omega, \mathbf{P})$ definieren wir die Zufallsvariable X als $X(\omega) = |\omega|$. Bestimmen Sie die Verteilung von X sowie deren Erwartungswert und Varianz. Geben Sie Ihr Ergebnis vollständig vereinfacht an.
Hinweis: Die Verteilung von X ist gegeben durch $\mathbf{P}(X = i)$ für alle $0 \leq i \leq n$. Vollständig vereinfacht bedeutet als geschlossene Form ohne Summenzeichen und ohne „...“.

Aufgabe 4 (Darstellungen) (4 Punkte)
Der Nikolaus richtet sich mit folgendem Graphen und einigen Fragen an Sie...



1. Stellen Sie den Graph $G = (V, E)$ durch die Angabe der Mengen V und E dar.
2. Bestimmen Sie $\Gamma(a)$, $\Gamma(d)$ und $\deg(d)$.
3. Sei der Graph $H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{a, e, b\}$ und $E_H = \{\{a, e\}, \{a, b\}\}$ gegeben.
   a) Ist H ein Teilgraph von G?
   b) Ist H ein induzierter Teilgraph von G?
   c) Ist H eine Zusammenhangskomponente von G?

Aufgabe 5 (Darstellung, Begriffe) (3 Punkte)
Die Kanten eines Graphen G seien durch die folgenden Nachbarschaften von Knoten gegeben:

v	$\Gamma(v)$
1	$\{2, 3\}$
2	$\{1, 4, 5, 7\}$
3	$\{1, 4\}$
4	$\{2, 3, 7\}$
5	$\{2, 6\}$
6	$\{5, 7\}$
7	$\{2, 4, 6\}$

1. Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen G an.
2. Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $\{1, 2, 4, 7\}$ induzierten Teilgraphen von G.

Aufgabe 6 (Modellierung, Begriffe) (7 Punkte)

Kevin-Arne hat eine SHK Stelle beim IMT und bekommt die Aufgabe Rechner zu vernetzen. Das IMT verlangt folgende Eigenschaften des Netzwerkes:

P_0 Von jedem Rechner aus muss jeder andere Rechner über einen Leitungsweg erreichbar sein.

P_1 Auch wenn genau eine Leitung zwischen zwei Rechnern ausfällt, muss jeder Rechner über einen Weg mit jedem anderen Rechner verbunden sein.

P_2 An jedem Rechner können maximal 4 Leitungen angeschlossen werden.

Ein Netzwerk lässt sich leicht als Graph darstellen: ein Knoten repräsentiert einen Rechner, eine Kante eine Leitung. Das IMT besitzt ingesamt n Rechner.

1. Formulieren Sie die Eigenschaften P_0, P_1 und P_2 mit Begriffen der Graphentheorie.
2. Kevin-Arne schlägt vier verschiedene Netzwerke vor. Helfen Sie dem IMT, indem Sie die folgenden Graphen mit $V = \{0, \ldots, n-1\}$ auf ihre Tauglichkeit bezüglich der Eigenschaften P_0, P_1 und P_2 untersuchen.
   a) $G_1 = (V, E_1)$ mit $E_1 = \{\{0, i\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$
   b) $G_2 = (V, E_2)$ mit $E_2 = \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i \leq n-2\}$
   c) $G_3 = (V, E_3)$ mit $E_3 = \{\{i, (i+1) \mod n\} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$
   d) $G_4 = (V, E_4)$ mit $E_4 = \{\{i, \lfloor i/2 \rfloor\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$