Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

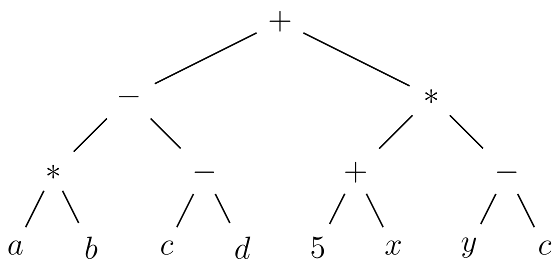
2. Dezember 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 7
Abgabe: 12. Dezember 2016 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 5 Aufgaben mit insgesamt 29 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Termnotation) (3 Punkte)
Geben Sie für den folgenden Term in Baumdarstellung die Infix-, Postfix- und Präfixform an.



Aufgabe 2 (abstrakte Algebra definieren) (8 Punkte)
Geben Sie eine vollständige algebraische Spezifikation für eine Liste von Elementen der Sorte E an. Die wesentlichen Funktionen, die auf einer solchen Liste benötigt werden, sind:

- eine Funktion *ins*, die ein Element $e \in E$ in eine Liste einfügt
- eine Funktion *at*, die zu einer Liste und einer natürlichen Zahl n das Element liefert, das an der Position n in der Liste steht
- eine Funktion *pos*, die zu einer Liste und einem $e \in E$ die Position in der Liste liefert, an der das Element e steht
- eine Funktion *empty*, die zu einer Liste angibt, ob die Liste leer ist
- eine Funktion *new*, die eine neue Liste erzeugt

Zusätzlich zu der Signatur $\Sigma = (S, F)$ sollen mindestens 5 sinnvolle Axiome angegeben werden.

Aufgabe 3 (Permutationen) (5 Punkte)

1. Wir betrachten die symetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit $n = 4$, Bestimmen Sie mit Hilfe der Stirlingzahlen erster Art die Anzahl der Permutation mit $k = 2$ Zyklen. Notieren sie jeden einzelnen Schritt.

2. Versuchen Sie eine Gesetzmäßigkeit für Zahlen der Art $S_{n,n}$ herauszufinden. Begründen Sie ihre Antwort.

3. Wir betrachten das Tupel (a, a, a, b, b, c). Objekte mit dem gleichen Bezeichner sind nicht zu unterscheiden. Wie viele unterscheidbare Permutationen gibt es?

Aufgabe 4 (Permutationen) (8 Punkte)

1. Sei $(\pi \circ \pi')(i) = \pi(\pi'(i))$ die Konkatenation zweier Permutationen und id die Permutation, die eine Zahl auf sich selbst abbildet, also $\mathrm{id}(j) = j$. Zu jeder Permutation π existiert eine natürliche Zahl k mit $\pi^k = \underbrace{\pi \circ \pi \circ \ldots \circ \pi}_{k \text{ mal}} = \mathrm{id}$.

   Wie lässt sich k mit Hilfe der Zyklendarstellung bestimmen?

2. Betrachten Sie folgende Definition.

   Definition 4.1 *Sei $n \in \mathbb{N}$ und π eine Permutation auf $\{1, \ldots, n\}$. Dann ist*

   $$p(\pi) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}.$$

   Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien π, τ zwei Permutationen auf $\{1, \ldots, n\}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $p(\pi \circ \tau) = p(\pi) \cdot p(\tau)$.

Aufgabe 5 (Kombinatorik) (5 Punkte)
Wie viele verschiedene Wege gibt es in einem regulären $n \times m$ Gitter von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke, wenn nur Bewegungen nach rechts und oben erlaubt sind?

Beispiel 5.2 4×6 *Gitter*