

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 4

Abgabe: 21. November 2016 – 14:00 Uhr

(Dieser Übungszettel enthält 5 Aufgaben mit insgesamt 29 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Beweistechniken)

(6 Punkte)

1. Betrachten Sie folgenden Satz:

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Primzahlen p und q ($kgV(p, q)$) ist immer ihr Produkt $p \cdot q$.

Beweisen Sie den Satz indirekt durch einen Widerspruchsbeweis.

2. Betrachten Sie folgenden Satz:

Sei $x \in \mathbb{N}$ durch die natürlichen Zahlen a und b teilbar, dann gilt auch $kgV(a, b) | x$.

Beweisen Sie den Satz mit Hilfe der Kontraposition.

3. Betrachten Sie folgenden Satz:

Seien A und B zwei Mengen mit der Eigenschaft $A \cup B \subseteq A \cap B$, dann gilt $A = B$.

Beweisen Sie den Satz direkt.

Aufgabe 2 (Semantische Folgerung)

(5 Punkte)

Tragen Sie in die Felder der nachfolgenden Tabelle ein, ob aus der Formel in der aktuellen Zeile die Formel in der aktuellen Spalte semantisch folgt (α und β seien aussagenlogische Formeln). Verwenden Sie die Einträge

- \models für semantische Folgerung (Zeilenformel \models Spaltenformel)
- X für keine Folgerung (Zeilenformel $\not\models$ Spaltenformel)

	$\beta \rightarrow \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha \vee \beta$
α				
β				
$\alpha \rightarrow \beta$				
$\alpha \wedge \beta$				
$\neg(\alpha \vee \neg\beta)$				

Aufgabe 3 (Modellierung, Resolution)

(6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Elementaraussagen:

- *Mo*: Es ist Montag
- *Di*: Es ist Dienstag
- *Mi*: Es ist Mittwoch
- *Do*: Es ist Donnerstag
- *Fr*: Es ist Freitag
- *C*: Es gibt Currywurst
- *T*: Es gibt Teufelsrösti
- *M*: Es gibt Milchreis
- *P*: Paul geht in die Mensa
- *K*: Kevin-Arne geht in die Mensa
- *J*: Jasmin geht in die Mensa

1. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

- a) Jasmin geht in die Mensa, wenn Paul in die Mensa geht oder wenn es Milchreis gibt.
- b) Jasmin hat dienstags Vorlesung und geht darum dienstags nicht in die Mensa.
- c) Freitags gibt es in der Mensa immer Currywurst.
- d) Paul geht in die Mensa, falls es Currywurst gibt.
- e) Kevin-Arne geht genau dann in die Mensa, wenn Paul nicht in die Mensa geht.
- f) Wenn es Milchreis und Teufelsrösti gibt, dann ist Mittwoch.

2. Zeigen Sie:

- a) Die Aussage „Dienstags geht Kevin-Arne in die Mensa.“ folgt semantisch aus den obigen Aussagen.
- b) Die Aussage „Es ist Freitag und Kevin-Arne und Jasmin treffen sich in der Mensa.“ ist zusammen mit den obigen Aussagen widerspruchsvoll.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Stellen Sie die benötigte Formel auf und transformieren Sie diese in NNF.
- Transformieren Sie die Formel, falls möglich, in eine äquivalente Horn-Formel, ansonsten in KNF.
- Wenden Sie, falls möglich, das Unit-Resolutionsverfahren an, ansonsten das normale Resolutionsverfahren.

Aufgabe 4 (Prädikatenlogische Formeln)

(9 Punkte)

Seien $KS = \{a, b, c\}$, $FS = \{f, g, h\}$, $V = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und $PS = \{P, Q, R, P_1\}$ die Mengen der Individuenkonstanten, Funktionssymbole, Individuenvariablen und Prädikatssymbole. Gegeben seien die folgenden Ausdrücke:

1. $((\neg Q(x_1, z, y)) \wedge Q(x_2, x_3, x_4)) \vee P(g(b, g(x_1)), f(y))$
2. $Q(f(a)) \wedge \neg P(f(x, y))$
3. $\left(\left((\forall x P(x_1, x_2, x_3) \wedge (\neg P(x, z, y))) \right) \vee \left(\exists x Q(g(f(x), a), f(y)) \right) \right)$
4. $(\exists x (\forall y, z P(x, y, z) \wedge \neg Q(z)))$
5. $(\exists x (\forall y P(y, x) \wedge \forall a P(x, a)))$

Bearbeiten Sie für jede Formel jeweils die folgenden Teilaufgaben und begründen Sie Ihre Antworten:

- Handelt es sich um eine Formel in PL1? Falls ja:
 - Wie lautet die Signatur Σ der Formel?
 - Wie lautet die Menge der Literale der Formel?
 - Wie lauten die Mengen $freevars(\alpha)$ und $boundvars(\alpha)$ der Formel?
 - Wie lautet die Menge der Terme?
 - Handelt es sich um eine geschlossene Formel?
 - Ist die Formel konsistent umbenannt?
 - Falls die Formel nicht konsistent umbenannt ist, überführen Sie die Formel in eine konsistent umbenannte Formel.
 - Entfernen Sie alle nicht benötigten Klammern der Formel.
 - Geben Sie eine mögliche Interpretation auf einem geeignet gewählten Grundbereich ω an, indem Sie den Elementen aus Σ und V entsprechende Objekte der richtigen Stelligkeit über ω zuordnen.

Aufgabe 5 (Interpretation)

(3 Punkte)

Erklären Sie in eigenen Worten und mit maximal drei Sätzen, was es inhaltlich bedeutet, eine prädikatenlogische Formel zu interpretieren.