Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

28. Oktober 2016

# Modellierung – WS 2016/2017

**Heimübung 2**
**Abgabe: 7. November 2016 – 14:00 Uhr**
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben mit insgesamt 32 Punkten)

*Hinweis:* Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

**Aufgabe 1** (Relationen, Eigenschaften) (5 Punkte)
Seien $a, b, n \in \mathbb{N}$. Wir sagen "$a$ ist kongruent $b$ div $n$" wenn $a$ und $b$ bei der ganzzahligen Division durch $n$ das gleiche Ergebnis liefern. Wir schreiben in dem Fall

$$a \equiv b \quad \text{div } n \, .$$

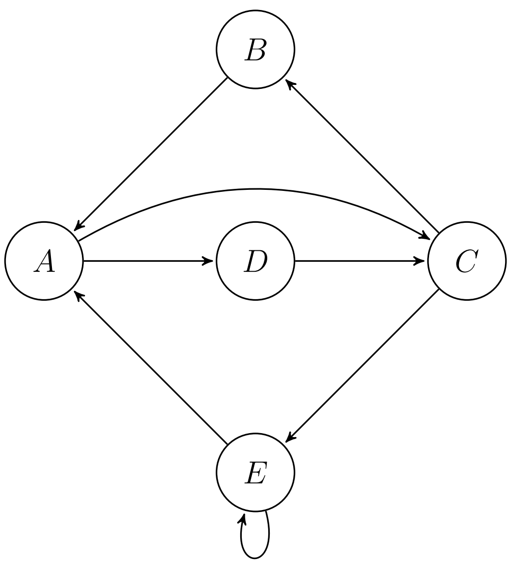
**Beispiel 1.1** *$11 \equiv 13 \quad \text{div } 5$, da $11 \div 5 = 2$ Rest 1 und $13 \div 5 = 2$ Rest 3.*
Wir definieren die Relation

$$R_n := \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 | \; a \equiv b \quad \text{div } n\} \, .$$

In der Vorlesung wurden Eigenschaften für Relationen definiert.

1. Welche dieser Eigenschaften erfüllt die Relation $R_n$ und welche nicht? Geben Sie eine Begründung für *jede* der sieben in der Vorlesung vorgestellten Eigenschaften an.
2. Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation? Begründen Sie.

**Aufgabe 2** (Graphen) (4 Punkte)
Gegeben sei der folgende gerichtete Graph:



1. Stellen Sie den gerichteten Graph $G = (V, E)$ durch die Angabe der Mengen $V$ und $E$ dar.
2. Ist der Graph zyklenfrei?
3. Ist die durch den Graphen dargestellte zweistellige Relation reflexiv?
4. Ist die durch den Graphen dargestellte zweistellige Relation transitiv? Falls nicht, welche Kanten müssen ergänzt werden, damit die Relation transitiv wird?

**Aufgabe 3** (Funktionen) (9 Punkte)

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $f((a, b)) = a/b$ für alle $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Geben Sie an, ob diese Funktion total, surjektiv, injektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Herbert hat dieses Jahr an einem Montag, Dieter an einem Mittwoch, Anja und Claudia an einem Dienstag, und Hugo an einem Sonntag Geburtstag. Geben Sie den Graphen der Funktion *Geburtstag* an, der jeder Person einen Wochentag zuordnet. Aus welcher Menge stammt diese Funktion? Wie lauten Definitions- und Bildbereich?
3. Seien $A, B, C$ Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ zwei Funktionen. Als *Komposition* $g \circ f$ bezeichnen wir die Relation

$$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{Es gibt ein } b \in B, \text{ sodass } f(a) = b \land g(b) = c\}.$$

   Beweisen oder widerlegen Sie

   a) $g \circ f$ ist eine Funktion,

   b) Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv,

   c) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.

**Aufgabe 4** (Beweisen / Widerlegen) (4 Punkte)
Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ aussagenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Jede Teilformel einer tautologischen Formel ist selbst eine erfüllbare Formel.
2. Wenn $\neg\alpha \approx \neg\beta$, dann $\alpha \approx \beta$.
3. Wenn $\alpha \approx \beta$ und $\gamma \approx \delta$, dann $\alpha \lor \gamma \approx \beta \lor \delta$.
4. Wenn $\alpha \lor \gamma \approx \beta \lor \delta$, dann $\alpha \approx \beta$ und $\gamma \approx \delta$.

**Aufgabe 5** (Modellierung, semantische Folgerung) (4 Punkte)
Wir modellieren den Betriebszustand eines Kaffeeautomaten durch folgende Elementaraussagen:

**W:** Der Automat enthält genügend Wechselgeld.

**K:** Der Automat enthält genügend Kaffee.

**B:** Die Lampe „betriebsbereit“ leuchtet.

Die folgende Menge $\mathcal{M}$ von aussagenlogischen Formeln soll die Betriebszustände des Kaffeeautomaten beschreiben.

$$\mathcal{M} = \{\neg W \rightarrow \neg B, \neg K \rightarrow \neg B\}$$

Die erfüllenden Interpretationen von $\mathcal{M}$ sollen genau den sinnvollen Betriebszuständen des Automaten entsprechen.

1. Widerlegen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel die folgende semantische Folgerung.

$$\mathcal{M} \models (W \wedge K) \rightarrow B$$

2. Zeigen Sie, dass folgende semantische Folgerung gilt:

$$\mathcal{M} \models B \rightarrow W.$$

   Geben Sie jeden Zwischenschritt an, markieren Sie in jedem Schritt, welche Teilformel Sie umformen, und geben Sie in jedem Schritt die verwendete Regel an.

**Aufgabe 6** (Modell und Realität) (6 Punkte)

In einem Modell arbeiten wir mit folgenden Aussagen:

- Es ist Mittagszeit
- Der Hase hat Hunger
- Der Hase ist satt

1. Zeigen oder widerlegen Sie, dass folgende Formel erfüllbar ist: Der Hase hat Hunger $\wedge$ Der Hase ist satt.
2. Gegeben sei die Wissensbasis $\beta$ = Der Hase hat Hunger $\leftrightarrow$ Es ist Mittagszeit
   a) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Formel $\beta \wedge$ Der Hase ist satt $\wedge$ Es ist Mittagszeit ist erfüllbar.
   b) Zeigen oder widerlegen Sie: $\beta \wedge$ Der Hase ist satt $\wedge$ Es ist Mittagszeit $\models$ Der Hase hat Hunger
3. Analyse und Verbesserung (Beantworten Sie diese Fragen mit einem Satz).
   a) Wie erklären Sie die merkwürdigen Ergebnisse aus (1) und (2b)?
   b) Wie würden Sie die Wissensbasis $\beta$ verändern, um die Realität besser zu modellieren?
   c) Wie kann man mit der neuen Wissensbasis zeigen, dass der Hase keinen Hunger hat, wenn er satt ist?