Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

6. Januar 2017

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 10
Abgabe: 16. Januar 2017 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben mit insgesamt 29 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Aussagenlogik, Terme) (7 Punkte)
Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ mit $\mathcal{S} = \{FORM\}$ und

$$\begin{array}{rrll} \mathcal{F} = \{ & true: & & \to FORM \\ & false: & & \to FORM \\ & \neg: & FORM & \to FORM \\ & \wedge: & FORM \times FORM & \to FORM \\ & \vee: & FORM \times FORM & \to FORM \quad \}. \end{array}$$

Seien α, β Variablen der Sorte $FORM$.

1. Prüfen Sie, ob der Term

$$\vee\Big(\wedge(\alpha, \beta), \wedge(\neg(\alpha), \neg(\beta))\Big)$$

   bezüglich Σ korrekt ist. Formen Sie den Term in Infixform um und markieren Sie, falls nötig, an welcher Stelle der Term nicht korrekt gebildet wurde.

2. Nun erweitern wir Σ, damit wir modellieren können wie Terme der Sorte $FORM$ zueinander in Verbindung stehen. Wir setzen $\Sigma' = (\mathcal{S}', \mathcal{F}')$ mit $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{BOOL\}$ und

$$\begin{array}{rrll} \mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{ & \approx: & FORM \times FORM & \to BOOL \\ & \models: & FORM \times FORM & \to BOOL \quad \} \end{array}$$

   Prüfen Sie, ob die folgenden Terme bezüglich der Signatur Σ' korrekt sind. Formen Sie anschließend alle Terme in Infixform um. Markieren Sie bei nicht korrekten Termen in der Infixform an welcher Stelle der Term nicht korrekt gebildet wurde.

   a) $\approx\Big(\wedge(\neg(\alpha), \beta), \neg\Big(\vee(\alpha, \neg(\beta))\Big)\Big)$

   b) $\models\Big(\alpha, \approx\Big(\beta, \wedge(\alpha, \neg(\beta))\Big)\Big)$

   c) $\approx\Big(\models(\alpha, \beta), \wedge(\alpha, \neg(\beta))\Big)$

3. Erweitern Sie Σ' um die Ihnen bekannten Operationen $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$, sodass der Term

$$\Leftrightarrow (\approx (\leftrightarrow (\alpha, \beta), true), \approx (\alpha, \beta))$$

   bezüglich Ihrer Erweiterung korrekt ist. Welche Bedeutung hat dieser Term im Sinne der Aussagenlogik?

Aufgabe 2 (Aussagenlogik, Modellieren) (10 Punkte)
Kevin-Arne soll für eine Veranstaltung in einem höheren Semester folgende Aufgabe lösen:

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Geben Sie ein Programm an, das bestimmt, ob G einen Hamiltonkreis enthält.

Leider hat Kevin-Arne in der Vorlesung nicht aufgepasst und deshalb keine gute Idee. Er hat jedoch aus einer vorhergehenden Präsenzübung ein Programm, das folgendes Problem löst:

Gegeben sei eine aussagenlogische Formel α. Geben Sie ein Programm an, das bestimmt, ob α erfüllbar ist.

Helfen Sie Kevin-Arne in dem Sie

1. einen Hamiltonkreis in einem Graphen durch eine aussagenlogische Formel modellieren.

   Hinweis: Nutzen Sie Variablen x_{ij} für $i \in V$ und $1 \leq j \leq |V|$, wobei x_{ij} wahr sein soll, wenn Knoten i an Position j im Hamiltonkreis steht.

2. ihm erklären, dass Ihre Formel genau dann erfüllbar ist, wenn der Graph einen Hamiltonkreis enthält. Wie hilft das Kevin-Arne bei seiner Aufgabe?

   Hinweis: Kevin-Arne ist auch ohne formalen Beweis zufrieden. Ihm reicht eine Erklärung Ihrer Ideen.

Aufgabe 3 (Graphen, Matchings) (2 Punkte)
Beweisen Sie folgenden, aus der Vorlesung bekannten Satz.

Satz 3.1 *Sei $G = (A \uplus B, E)$ ein bipartiter Graph in dem ein Matching M mit $|M| = |A|$ existiert. Für alle $X \subseteq A$ gilt $|\Gamma(X)| \geq |X|$.*

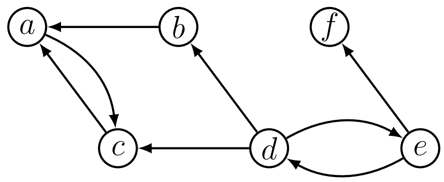
Aufgabe 4 (Starke Zusammenhangskomponenten) (3 Punkte)
Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{\ 1,2,3,4,5,6,7\} \\ E &= \{\ (1,2),(1,3),(1,7),(2,4),(2,5),(3,4),(3,7), \\ &\quad\ (4,2),(4,5),(5,2),(6,3),(6,7),(7,1),(7,4)\}\ . \end{aligned}$$

Geben Sie zunächst alle starken Zusammenhangskomponenten[1] von G an. Ändern Sie dann *die Richtung* genau einer Kante aus G so, dass der entstehende Graph G' genau zwei starke Zusammenhangskomponenten enthält. Geben Sie die entsprechende Kante und die zwei Zusammenhangskomponenten von G' an.

Aufgabe 5 (Graphen,transitive Hülle) (3 Punkte)
Die transitive Hülle eines (gerichteten) Graphen G ist der Graph G', in dem zwei Knoten u und v durch eine (gerichtete) Kante verbunden sind genau dann, wenn es in G einen Weg von u nach v gibt.

1. Zeichnen Sie die transitive Hülle des folgenden Graphen:



2. Sei G ein stark zusammenhängender, gerichteter Graph mit n Knoten. Um welchen Graphen handelt es sich bei dem der transitiven Hülle von G zugrunde liegendem ungerichteten Graphen?

Aufgabe 6 (Beweis) (4 Punkte)
Betrachten Sie die folgende Verallgemeinerung von Binärbäumen.

Definition 6.2 *Ein k-ärer Baum ist ein Wurzelbaum, indem jeder Knoten höchstens k unmittelbare Nachfolger hat.*
Ein vollständiger k-ärer Baum ist ein k-ärer Baum, in dem

1. *jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau k unmittelbare Nachfolger hat.*
2. *alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.*

Zeigen Sie, dass ein vollständiger k-ärer Baum der Höhe n

$$\frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Knoten besitzt.

[1] Für die Definition starker Zusammenhangskomponenten siehe Präsenzübungsblatt 9, Aufgabe 2