Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Eyke Hüllermeier

21. Oktober 2016

Modellierung – WS 2016/2017

Heimübung 1
Abgabe: 31. Oktober 2016 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 7 Aufgaben mit insgesamt 29 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Extensionale Darstellung) (3 Punkte)
Beschreiben Sie die folgenden intensional definierten Mengen jeweils mit einem kurzen Satz und geben Sie zu jeder Menge die entsprechende extensionale Definition an. Denken Sie daran, dass $0 \notin \mathbb{N}$.

1. $M := \{a \ : \ a \in \mathbb{N} \text{ und } 4 < a \text{ und } a \leq 9\}$
2. $M := \{z \ : \ a, b, z \in \mathbb{Z} \text{ und } z = \frac{a}{b} \text{ und } 0 < a < b\}$
3. $M := \{(j \cdot k, j, k) \ : \ j, k \in \mathbb{N} \text{ und } j + k \leq 5\}$

Aufgabe 2 (Intensionale Darstellung) (3 Punkte)
Geben Sie nun für die folgenden in Worten beschriebenen Mengen eine intesionalen Definition an. Denken Sie daran, dass $0 \notin \mathbb{N}$.

1. Die Menge aller geraden, natürlichen Zahlen.
2. Die Menge aller natürlichen Zahlen, deren Quadrat echt kleiner ist als 20.
3. Die Menge aller 3-elementigen Teilmengen aus den natürlichen Zahlen von 0 bis 4.

Aufgabe 3 (Mengenoperationen / Kardinalitäten) (7 Punkte)

1. Es sei $Holzart := \{Eiche, Kiefer\}$ und $Moebelobjekt := \{Tisch, Schrank, Stuhl, Bett\}$. Geben Sie das kartesischen Produkt $Moebelstuecke := Holzart \times Moebelobjekt$ in extensionaler Darstellung sowie die Kardinalität der Mengen $Moebelstuecke$ und $Pow(Moebelstuecke)$ an.
2. Es sei $X := \{Hund, Pferd\}$, $Y := \{Katze\}$ und $Z := \{Maus\}$. Geben Sie die extensionale Darstellung sowie die Kardinalität der Mengen $M_1 := Pow(X \cup Y)$ und $M_2 := Pow(X \times Y) \times Z$ an. Geben Sie ebenfalls die Ergebnisse aller Zwischenschritte an.

3. Es sei

$$\begin{aligned} A &:= \{\mathit{Englisch}, \mathit{Deutsch}, \mathit{Spanisch}, \mathit{Hollaendisch}\} \\ B &:= \{\mathit{Englisch}, \mathit{Spanisch}, \mathit{Portugiesisch}\} \\ C &:= \{\mathit{Griechisch}, \mathit{Deutsch}, \mathit{Franzoesisch}\}. \end{aligned}$$

   a) Geben Sie die extensional Darstellung folgender Mengen an:
      i. $A \cup B$
      ii. $B \cap C$
      iii. $A \setminus B$
   b) Überprüfen Sie die folgende Gleichung auf Korrektheit, indem Sie die extensionale Darstellung beider Seiten der Gleichung berechnen. Geben Sie auch alle Zwischenergebnisse an.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. Es sei $\mathit{Farbe} := \{\mathit{Rot}, \mathit{Blau}\}$ und $\mathit{Kleidungsform} := \{\mathit{Pullover}, \mathit{Jacke}, \mathit{Hose}\}$. Geben Sie die extensionale Darstellung und die Kardinalität des kartesischen Produkts $\mathit{Kleidungsstuecke} := \mathit{Farbe} \times \mathit{Kleidungsform}$ an.

5. Es sei $M := \{\mathit{Pizza}, \mathit{Brot}\}$ und $N := \{\mathit{Salami}, \mathit{Kaese}, \mathit{Sardellen}\}$. Geben Sie die Kardinalität der Mengen $\mathit{Pow}(M \times N)$, $\mathit{Pow}(M \cup N)$, $\mathit{Pow}(M \setminus N)$ und $\mathit{Pow}(M \cap N)$ an.

6. Es sei $M := \{a, b, c\}$ und $N := \{b, c, d\}$. Geben Sie die extensionale Darstellung der Mengen $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$ und $\mathit{Pow}(M \cap N)$ an.

7. Gegeben seien zwei Mengen M und N mit den Kardinalitäten $|M| = m$ und $|N| = n$. Geben Sie die Kardinalität der Menge $\mathit{Pow}(M \times N)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Sie dürfen die Namen der Elemente in den Mengen abkürzen, wenn Sie die Abkürzungen zuvor definieren.

Aufgabe 4 (Induktiv definierte Menge) (2 Punkte)
Definieren Sie die Menge der geraden, natürlichen Zahlen induktiv.

Aufgabe 5 (Vollständige Induktion) (2 Punkte)
Für ein $n > 1$ sie $M_n := \{\{a, b\} : a, b \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq a < b \leq n\}$ die Menge aller zweielementigen Mengen, deren Elemente kleiner gleich n sind. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt

$$|M_n| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Aufgabe 6 (Folgen) (6 Punkte)

Geben Sie eine formale Definition der folgenden informellen Beschreibung der Menge A_k an. Verwenden Sie dazu die Notation $x \mid y$ um auszusagen, dass die Zahl x die Zahl y teilt, und $x \nmid y$ um auszusagen, dass die Zahl x die Zahl y nicht teilt.

Die Menge A_k ist die Menge aller k-Tupel aus natürlichen Zahlen, bei denen dem ersten Element **alle** seine Teiler in absteigender Reihenfolge folgen. Ein Tupel endet stets mit 1.

Beispiel 6.1 $(15, 5, 3, 1) \in A_4$, $(15, 3, 1) \notin A_3$.

Aufgabe 7 (Modellierung) (6 Punkte)

Auf einer Weihnachtsfeier sind m Frauen und n Männer, also insgesamt $m + n$ Personen. Das Getränkeangebot umfasst Bier und Glühwein. Der Glühwein kann auf Wunsch Zimt und/oder Amaretto enthalten. Man hat die Wahl zwischen drei verschiedenen Bechergrößen, nämlich klein, mittel und groß.

1. Geben Sie Mengen für *Frauen*, *Männer*, *Personen* und *Getränke* in intensionaler Darstellung oder zusammengesetzt aus zuvor von Ihnen definierten Mengen an. Modellieren Sie dabei eine Person als Tupel bestehend aus ihrem Geschlecht und einer laufenden Nummer. Benutzen Sie außer der Menge der natürlichen Zahlen keine vordefinierten Mengen.

2. Die Personen aus Teil (1) können im Laufe des Abends eine gewisse Anzahl jedes Getränks zu sich nehmen. Entgegen der allgemeinen Auffassung ist die Reihenfolge dabei *nicht* wichtig. Am Ende der Feier haben sich einige Gruppen von Personen gebildet, die sich ein Taxi für den Heimweg teilen wollen.

   Gesucht ist die Obermenge aller Relationen, die den *Getränkekonsum* der Personen beschreiben, die während der Feier etwas getrunken haben, und die Menge aller möglichen *Taxigruppen*. Geben Sie diese beiden Mengen an. Sie können dabei die Namen der in (1) gesuchten Mengen verwenden.

3. Auf einer konkreten Weihnachtsfeier sind zwei Frauen und drei Männer, die wir mit f_1, f_2, bzw. m_1, m_2 und m_3 bezeichnen. m_1 trinkt während des Abends drei große Bier, während f_1 einen Glühwein mit und einen ohne Amaretto trinkt - jeweils ohne Zimt aus einem kleinen Becher. Alle anderen trinken nichts. Am Ende teilen sich f_1, f_2 und m_1 sowie m_2 und m_3 ein Taxi.

   Geben Sie eine Relation für den *Getränkekonsum* und die Menge der *Taxigruppen* an, die die genannten Fakten modellieren. Die Relation und die Menge sollen aus den in Teil (2) definierten Mengen stammen.