Prof. Dr. Blömer und Prof. Dr. Hüllermeier

Probeklausur zur Vorlesung **Modellierung**

Für Studiengänge mit einem Modellierungsanteil von **10 ECTS**, wie zum Beispiel der Bachelorstudiengang Informatik

Wintersemester 2016/2017

- Aufkleber der Klausuraufsicht -

Beachten Sie folgende Hinweise

- Die Klausur besteht aus 28 Seiten mit 9 Aufgaben. Insgesamt können Sie 160 Punkte erreichen. Die Klammerung darf nicht gelöst werden!
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes Blatt (A4).
- Schreiben Sie Lösungen möglichst in die vorgegebenen Kästen.
- Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben oder ist die Lösung nicht eindeutig, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst.
- Verwenden Sie zum Schreiben keine radierbaren Stifte, verwenden Sie keine Korrekturflüssigkeiten oder Korrekturroller und schreiben Sie nicht in roter oder grüner Farbe.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
maximale Punkte	22	24	11	23	17	20	17	12	14	160
erreichte Punkte										

Aufgabe 1 (Mengen & Relationen)

Teilaufgabe 1.1 (Beweis) / 6 Punkte

Sei M eine endliche, nicht-leere Menge. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|M^n| = |M|^n \ .$$

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 1.2 (Extensionale Darstellung) / **3 Punkte**

Geben Sie für die folgenden Mengen U, V und W jeweils die extensionale Darstellung und die Kardinalität an. Dabei seien $A = \{a, b\}$ und $B = \{b, c\}$.

1. $U = \mathrm{Pow}(\emptyset) \cup \{\emptyset\}$

   $U =$ ______________________________ $|U| =$

2. $V = (A \times B) \cap (B \times A)$

   $V =$ ______________________________ $|V| =$

3. $W = (A \setminus \{b\}) \times (A \times B)$

   $W =$ ______________________________ $|W| =$

Teilaufgabe 1.3 (Relationen) / **7 Punkte**

1. Gegeben sei die Relation

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ teilt } b \text{ ohne Rest}\} .$$

   Ist R_1 reflexiv, antisymmetrisch, transitiv oder alternativ? Treffen Sie eine Aussage zu jeder dieser Eigenschaften. Geben Sie für jede nicht zutreffende Eigenschaft ein entsprechendes Gegenbeispiel an.

2. Gegeben sei die Relation

$$R_2 = \{(a,b) \in (\mathbb{Q} \setminus \{0\})^2 \mid a = 1/b\} \ .$$

Ist R_2 irreflexiv, transitiv oder symmetrisch? Treffen Sie eine Aussage zu jeder dieser Eigenschaften. Geben Sie für jede nicht zutreffende Eigenschaft ein entsprechendes Gegenbeispiel an.

Teilaufgabe 1.4 (Funktionen) / **6 Punkte**

1. Sei $M = \{1,2,3\}$ und $N = \{a,b\}$. Kann es injektive, totale Funktionen $M \to N$ geben? Falls ja, so geben Sie die Anzahl aller möglichen injektiven, totalen Funktionen sowie ein Beispiel für eine solche Funktion $g : M \to N$ an. Falls nein, so begründen Sie, warum es keine solche Funktion geben kann.

Name:	Matrikelnummer:

2. Seien D und B endliche Mengen. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn es eine bijektive, totale Funktion $f : D \to B$ gibt, dann ist $|D| = |B|$.

Aufgabe 2 (Aussagenlogik)

Teilaufgabe 2.1 (Wahrheitstafel) / 8 Punkte

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit den Atomen A, B, C:

$$\alpha = (B \land \neg C) \land (A \land (C \lor \neg B))$$
$$\beta = B \to C$$

1. Vervollständigen Sie die gegebene Wahrheitstafel.

A	B	C	β	$B \land \neg C$	$C \lor \neg B$	$A \land (C \lor \neg B)$	α
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

2. Ist α tautologisch, erfüllbar, falsifizierbar oder widerspruchsvoll? Treffen Sie eine Aussage zu jeder dieser Eigenschaften. Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Sind α und β logisch äquivalent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:	Matrikelnummer:

4. Folgt β semantisch aus α? Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe 2.2 (Beweis) **/ 4 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie, dass für jede aussagenlogische Formel α in KNF gilt:

$$\alpha \text{ ist widerspruchsvoll} \Leftrightarrow \alpha \mid\!\underline{}_{\mathit{Unit\text{-}RES}}\ \sqcup\ .$$

Teilaufgabe 2.3 (Resolution) / **8 Punkte**

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel mit Atomen X, Y, Z

$$\alpha = (Z \to (\neg X \vee Y)) \wedge (Y \to \neg Z) \wedge (\neg X \to (Y \vee \neg Z)) \wedge Z \ .$$

1. Prüfen Sie, ob es eine Unit-Resolutionswiderlegung für diese Formel gibt. Transformieren Sie α dazu zunächst in KNF und eliminieren Sie Mehrfachvorkommen.

2. Welche Aussage können Sie aufgrund Ihres Ergebnis aus 1. über die Erfüllbarkeit von α treffen?

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 2.4 (Formalisieren) **/ 4 Punkte**

Formalisieren Sie die unten stehenden Beschreibungen aussagenlogisch. Nutzen Sie die folgenden Abkürzungen:

- Es regnet (R).
- Geno will zu Hause bleiben (H).
- Es ist Montag (M).
- Der Benz ist kaputt (B).

1. Wenn Geno zu Hause bleiben will, dann ist Montag.

2. Wenn es regnet, dann ist der Benz kaputt und es ist Montag.

3. Wenn Montag ist, dann regnet es entweder oder Geno will zu Hause bleiben.

4. Es regnet und Geno will zu Hause bleiben genau dann, wenn Montag ist und der Benz kaputt ist.

Aufgabe 3 (Prädikatenlogik)

Teilaufgabe 3.1 (Modellierung) / 8 Punkte

Wir betrachten eine Situation beim American Football.
Folgende Prädikate stehen zur Verfügung:

- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Spieler ist.
- $O(x)$ bedeutet, dass x in der Offensive spielt.
- $D(x)$ bedeutet, dass x in der Defensive spielt.
- $M(x)$ bedeutet, dass x eine Mannschaft ist.
- $G(x, y)$ bedeutet, dass x zu y gehört.
- $A(x, y)$ bedeutet, dass y von x abgedeckt wird.
- $I(x, y)$ bedeutet $x = y$.

Modellieren Sie die folgenden Zusammenhänge mit den gegebenen Prädikaten. Verwenden Sie **nicht** den Quantor '$\exists!$'.

1. Kein Spieler kann in der Offensive und in der Defensive spielen.

2. Jeder Spieler, der in der Offensive spielt, wird von einem Spieler, der in der Defensive spielt, abgedeckt.

3. Jeder Spieler gehört zu genau einer Mannschaft.

4. Jede Mannschaft hat wenigstens einen Spieler, der in der Defensive spielt, und wenigstens einen Spieler, der in der Offensive spielt.

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 3.2 (Umformen) **/ 3 Punkte**

Formen Sie die Formel

$$\alpha = \neg \forall z \exists y \forall x \big(\big(\neg Q(x) \to S(z,z) \big) \wedge S(y,x) \big) \wedge \exists w P(w)$$

in eine logisch äquivalente Formel β in pränexer Normalform (PNF) mit Kern in Negationsnormalform (NNF) um. Transformieren Sie β anschließend in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel γ in Skolem-Normalform (SKNF).

Aufgabe 4 (Kombinatorik und Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Teilaufgabe 4.1 (Kombinatorik) / **4 Punkte**

Auf wie viele Arten kann man 4 Nullen und 5 Einsen derart linear anordnen, dass keine der beiden Ziffern einen Block bildet (also weder alle Nullen hintereinander stehen noch alle Einsen)?

Teilaufgabe 4.2 (Wahrscheinlichkeitsmaße) / **5 Punkte**

Es sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathbf{P}$ auf $\mathrm{Pow}(\Omega)$ partiell definiert durch $\mathbf{P}(\{1, 2\}) = 0.5$ und $\mathbf{P}(\{1, 3\}) = 0.7$. Ergänzen Sie $\mathbf{P}$ zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω.

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 4.3 (Modellierung, Bedingte Wahrscheinlichkeit) **/ 6 Punkte**

Kunden einer Bäckerei kaufen Brot oder eine andere Ware (oder beides). Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde kein Brot kauft, beträgt 0.6. Mit Wahrscheinlichkeit 0.3 kauft ein Kunde sowohl Brot als auch eine andere Ware. Modellieren Sie das Kaufverhalten der Kunden formal mithilfe eines geeigneten (diskreten) Wahrscheinlichkeitsraumes. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde Brot kauft, vorausgesetzt er kauft eine andere Ware.

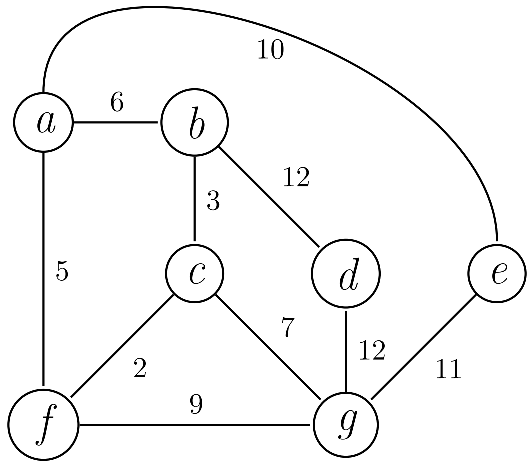
Teilaufgabe 4.4 (Modellierung, Zufallsvariablen) **/ 8 Punkte**

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum an, der das Ergebnis eines zweifachen Würfelwurfs modelliert. Wir interessieren uns dafür, ob die gewürfelten Augenzahlen benachbart sind (z.B. 3 und 4 oder 2 und 1) oder nicht. Definieren Sie hierzu eine geeignete Zufallsvariable. Geben Sie die Verteilung der Zufallsvariablen an. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen.

Aufgabe 5 (Graphen)

Teilaufgabe 5.1 (Ungerichtete Graphen) **/ 7 Punkte**

Gegeben sei der folgende ungerichtete Graph G mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$:



1. Geben Sie den Graphen $G = (V, E)$ als Knoten- und Kantenmenge an. / 2 Punkte

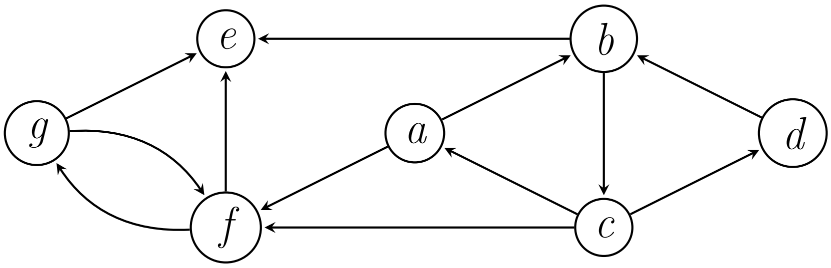
2. Existiert ein Eulerweg in G? Falls ja, so geben Sie diesen an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. / 3 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

3. Ist G bipartit? Begründen Sie Ihre Antwort. / 2 Punkte

Teilaufgabe 5.2 (Gerichtete Graphen) **/ 10 Punkte**

1. Gegeben sei der folgende gerichtete Graph $D = (V, E)$:



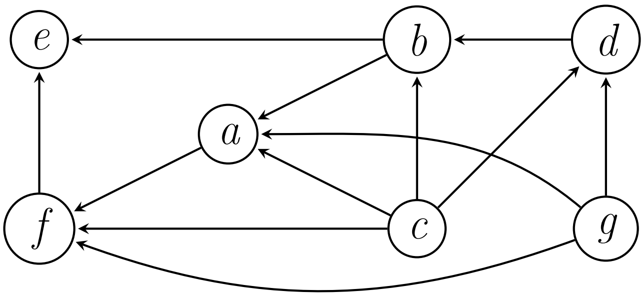
a) Geben Sie für die Knoten $a, b, f, d \in V$ den Eingangs- und Ausgangsgrad in D an. / 2 Punkte

	Eingangsgrad	Ausgangsgrad
a		
b		
f		
d		

b) Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten des Graphen D als Mengen von Knoten an. / 3 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

2. Gegeben sei der folgende gerichtete Graph $D = (V, E)$:



a) Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $V' = \{a, b, c, f, e\}$ induzierten Teilgraphen von D / 2 Punkte

b) Besitzt D eine topologische Sortierung? Falls ja, so geben Sie eine solche an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. / 3 Punkte

Aufgabe 6 (Beweisen und Modellieren)

Teilaufgabe 6.1 (Beweisen) **/ 8 Punkte**

Sei $a \in \mathbb{N}$ und $G = (A \uplus B, E)$ ein ungerichteter, bipartiter Graph, in dem jeder Knoten $v \in A \uplus B$ denselben Grad $\deg(v) = a$ hat.

Zeigen Sie, dass gilt: $|A| = |B|$.

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 6.2 (Modellieren) / **12 Punkte**

Fabian hat für sich und seine Freunde Leuchtschwerter in 7 verschiedenen Farben gekauft, die sie nun unter sich aufteilen wollen.
Wir bezeichnen die Menge der Freunde, unter denen die Leuchtschwerter aufgeteilt werden sollen mit $P = \{p_1, \dots, p_6\}$. Wir bezeichnen die Menge der Farben der Leuchtschwerter mit $F = \{f_1, \dots, f_7\}$. Wer welches Leuchtschwert mag, ist in der folgenden Tabelle angegeben. Dabei bedeutet ein Eintrag "✓" in Zeile i und Spalte j, dass p_i das Leuchtschwert mit der Farbe f_j mag. Der Eintrag "–" bedeutet, dass p_i die Farbe f_j nicht mag.

		Leuchtschwert-Farbe						
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Fabian	(p_1)	✓	✓	-	✓	-	-	-
Jakob	(p_2)	-	-	✓	-	✓	-	-
Gennadij	(p_3)	-	✓	-	-	-	-	✓
Sascha	(p_4)	✓	-	-	✓	-	✓	✓
Nils	(p_5)	-	✓	-	-	-	-	✓
Peter	(p_6)	-	-	✓	-	✓	-	-

Modellieren Sie den Sachverhalt der Tabelle als bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$.

1. Geben Sie an, wie die Mengen A und B definiert sind. Erklären Sie außerdem, wann eine Kante $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ in E enthalten ist. / 2 Punkte

2. Zeichnen Sie den Graphen. Zeichnen Sie dabei Knoten aus A auf die linke Seite und Knoten aus B auf die rechte Seite. / 2 Punkte

3. Jeder soll nun genau ein Leuchtschwert auswählen, dessen Farbe er mag. Ein Leuchtschwert darf dabei nicht mehrfach ausgewählt werden.

   Geben Sie eine Zuordnung als Menge an, die diese Anforderung erfüllt. Welches graphentheoretische Problem liegt dieser Frage zugrunde? / 4 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

4. Gennadij hat leider das Leuchtschwert mit der Farbe f_7 kaputt gemacht.

   Zeigen Sie: Es ist nicht möglich jedem $p_i \in P$ genau ein $f_j \in F \setminus \{f_7\}$ zuzuweisen, so dass p_i das Leuchtschwert mit der Farbe f_j mag und jeder sein eigenes Leuchtschwert bekommt. / 4 Punkte

Aufgabe 7 (Grammatiken)

Teilaufgabe 7.1 (Grundlagen) **/ 9 Punkte**

Gegeben sei die folgende Grammatik $G = (T, N, P, A)$ mit $T = \{0, 1\}$, $N = \{A, B\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{ A &::= 00A1\ , \\ A &::= 0A11\ , \\ A &::= 11B0\ , \\ B &::= 11B0\ , \\ B &::= B00\ , \\ B &::= \epsilon\ \}. \end{aligned}$$

1. Ist das Wort $w_1 = 11100$ in $L(G)$ enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort.

/ 3 Punkte

2. Zeichnen Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $w_2 = 00011000111 \in L(G)$.

/ 3 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

3. Ist die Grammatik G eindeutig? Falls ja, dann argumentieren Sie warum. Falls nicht, dann geben Sie ein Wort $w_3 \in L(G)$ und zwei verschiedene Rechtsableitungen für das Wort w_3 mit allen Ableitungsschritten an. / 3 Punkte

Teilaufgabe 7.2 (Grammatik Konstruieren) **/ 8 Punkte**

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \notin L_{ab}\} \ ,$$

wobei

$$L_{ab} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega = a^n b^m \text{ mit } n, m \geq 0\} \ .$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G als 4-Tupel $G = (T, N, P, S)$ mit $L(G) = L$ an. Geben Sie dabei G nicht in Backus-Naur-Form an und verwenden Sie höchstens 8 Ableitungsregeln.

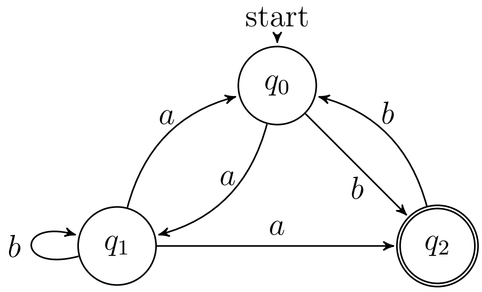
Hinweis: Lösungen mit mehr als 8 Ableitungsregeln oder in Backus-Naur-Form werden mit 0 Punkten bewertet.

Name:	Matrikelnummer:

Aufgabe 8 (Automaten)

Teilaufgabe 8.1 (Potenzmengenkonstruktion) / 4 Punkte

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische, endliche Automat (NFA) N:



Verwenden Sie die Potenzmengenkonstruktion, um N in einen deterministischen Automaten (DFA) $A = (\{a, b\}, \mathrm{Pow}(\{q_0, q_1, q_2\}), \delta^A, q_0^A, F^A)$ mit $L(A) = L(N)$ umzuwandeln.
Bestimmen Sie dafür explizit q_0^A, F^A und δ^A. Geben Sie dabei die Übergangsfunktion δ^A in tabellarischer Form an. Sie brauchen den Automaten A **nicht** zu zeichnen.

Teilaufgabe 8.2 (DFA Konstruieren) **/ 8 Punkte**

Gegeben Sei die Sprache

$$L_{ab} = \{\omega \in \{a,b\}^* |\ \omega \text{ beginnt mit einem } a \text{ und enthält nicht die Zeichenfolge } aba\}\ .$$

Zeichnen Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA), der L_{ab} akzeptiert und höchstens 8 Zustände hat.

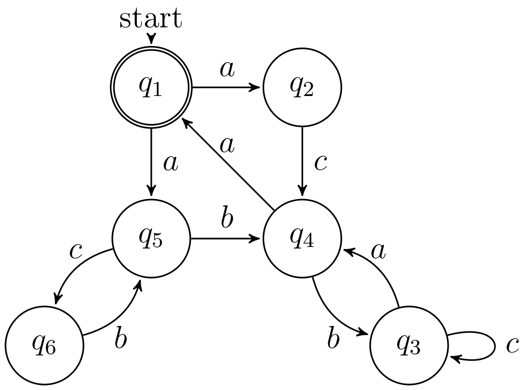
Hinweise: Lösungen mit mehr als 8 Zuständen werden mit 0 Punkten bewertet.

Name:	Matrikelnummer:

Aufgabe 9 (Reguläre Sprachen)

Teilaufgabe 9.1 (Regulären Ausdruck Bestimmen) / 6 Punkte

Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L(A)$ an, der aus höchstens 33 Zeichen besteht.

Hinweise: Reguläre Ausdrücke, die aus mehr als 33 Zeichen bestehen, werden mit 0 Punkten bewertet.

Teilaufgabe 9.2 (Pumping Lemma) **/ 8 Punkte**

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält doppelt so viele 0en wie 1en}\} \; .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass L nicht regulär ist.