Prof. Dr. Blömer und Prof. Dr. Hüllermeier

Probeklausur zur Vorlesung **Modellierung**

Für Studiengänge mit einem Modellierungsanteil von **5 ECTS**, wie zum Beispiel der Studiengang Lehramt für Haupt- und Realschule

Wintersemester 2016/2017

- Aufkleber der Klausuraufsicht -

Beachten Sie folgende Hinweise

- Die Klausur besteht aus 18 Seiten mit 8 Aufgaben. Insgesamt können Sie 80 Punkte erreichen. Die Klammerung darf nicht gelöst werden!
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes Blatt (A4).
- Schreiben Sie Lösungen möglichst in die vorgegebenen Kästen.
- Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben oder ist die Lösung nicht eindeutig, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst.
- Verwenden Sie zum Schreiben keine radierbaren Stifte, verwenden Sie keine Korrekturflüssigkeiten oder Korrekturroller und schreiben Sie nicht in roter oder grüner Farbe.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
maximale Punkte	15	8	6	10	12	11	12	6	80
erreichte Punkte									

Aufgabe 1 (Mengen & Relationen)

Teilaufgabe 1.1 (Beweis) / 6 Punkte

Sei M eine endliche, nicht-leere Menge. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|M^n| = |M|^n \ .$$

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 1.2 (Extensional Darstellung) / **2 Punkte**

Geben Sie für die folgenden Mengen V und W jeweils die extensionale Darstellung und die Kardinalität an. Dabei seien $A = \{a, b\}$ und $B = \{b, c\}$.

1. $V = (A \times B) \cap (B \times A)$

   $V =$ ____ $|V| =$

2. $W = (A \setminus \{b\}) \times (A \times B)$

   $W =$ ____ $|W| =$

Teilaufgabe 1.3 (Relationen) / **4 Punkte**

Gegeben sei die Relation

$$R_1 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a \text{ teilt } b \text{ ohne Rest}\} .$$

Ist R_1 reflexiv, antisymmetrisch, transitiv oder alternativ? Treffen Sie eine Aussage zu jeder dieser Eigenschaften. Geben Sie für jede nicht zutreffende Eigenschaft ein entsprechendes Gegenbeispiel an.

Teilaufgabe 1.4 (Funktionen) **/ 3 Punkte**

Sei $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{a, b\}$. Kann es injektive, totale Funktionen $M \to N$ geben? Falls ja, so geben Sie die Anzahl aller möglichen injektiven, totalen Funktionen sowie ein Beispiel für eine solche Funktion $g : M \to N$ an. Falls nein, so begründen Sie, warum es keine solche Funktion geben kann.

Name:	Matrikelnummer:

Aufgabe 2 (Aussagenlogik)

Teilaufgabe 2.1 (Wahrheitstafel) **/ 6 Punkte**

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit den Atomen A, B, C:

$$\alpha = (B \land \neg C) \land (A \land (C \lor \neg B))$$
$$\beta = B \to C$$

1. Vervollständigen Sie die gegebene Wahrheitstafel.

A	B	C	β	$B \land \neg C$	$C \lor \neg B$	$A \land (C \lor \neg B)$	α
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

2. Ist α tautologisch, erfüllbar, falsifizierbar oder widerspruchsvoll? Treffen Sie eine Aussage zu jeder dieser Eigenschaften. Begründen Sie Ihre Antwort.

Teilaufgabe 2.2 (Formalisieren) **/ 2 Punkte**

Formalisieren Sie die unten stehenden Beschreibungen aussagenlogisch. Nutzen Sie die folgenden Abkürzungen:

- Es regnet (R).
- Geno will zu Hause bleiben (H).
- Es ist Montag (M).
- Der Benz ist kaputt (B).

1. Wenn es regnet, dann ist der Benz kaputt und es ist Montag.

2. Wenn Montag ist, dann regnet es entweder oder Geno will zu Hause bleiben.

Name:	Matrikelnummer:

Aufgabe 3 (Prädikatenlogik) / **6 Punkte**

Wir betrachten eine Situation beim American Football.
Folgende Prädikate stehen zur Verfügung:

- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Spieler ist.
- $O(x)$ bedeutet, dass x in der Offensive spielt.
- $D(x)$ bedeutet, dass x in der Defensive spielt.
- $A(x, y)$ bedeutet, dass y von x abgedeckt wird.

Modellieren Sie die folgenden Zusammenhänge mit den gegebenen Prädikaten.

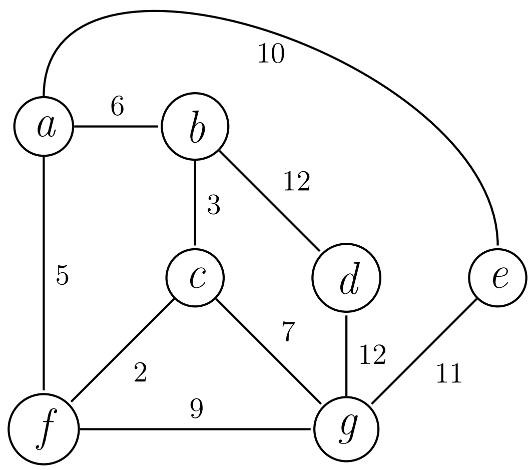
1. Kein Spieler kann in der Offensive und in der Defensive spielen.

2. Jeder Spieler, der in der Offensive spielt, wird von einem Spieler, der in der Defensive spielt, abgedeckt.

Aufgabe 4 (Graphen)

Teilaufgabe 4.1 (Ungerichtete Graphen) / 5 Punkte

Gegeben sei der folgende ungerichtete Graph G mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$:



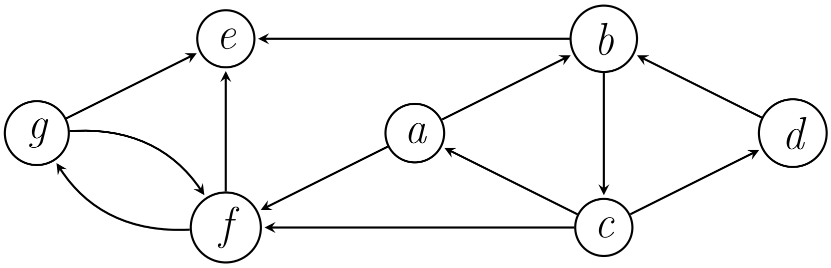
1. Geben Sie den Graphen $G = (V, E)$ als Knoten- und Kantenmenge an. / 2 Punkte

2. Existiert ein Eulerweg in G? Falls ja, so geben Sie diesen an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. / 3 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

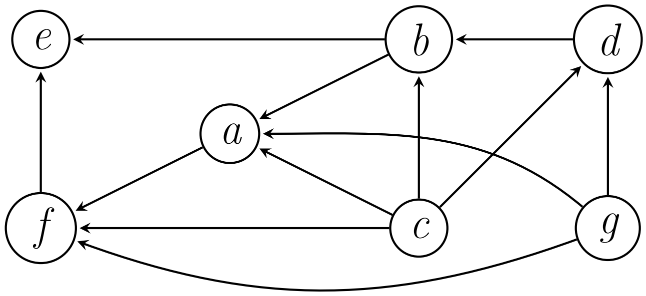
Teilaufgabe 4.2 (Gerichtete Graphen) / **5 Punkte**

1. Gegeben sei der folgende gerichtete Graph $D = (V, E)$:



Geben Sie alle starken Zusammenhangskomponenten des Graphen D als Mengen von Knoten an. / 3 Punkte

2. Gegeben sei der folgende gerichtete Graph $D = (V, E)$:



Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $V' = \{a, b, c, f, e\}$ induzierten Teilgraphen von D / 2 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (Modellieren) / 12 Punkte

Fabian hat für sich und seine Freunde Leuchtschwerter in 7 verschiedenen Farben gekauft, die sie nun unter sich aufteilen wollen.
Wir bezeichnen die Menge der Freunde, unter denen die Leuchtschwerter aufgeteilt werden sollen mit $P = \{p_1, \ldots, p_6\}$. Wir bezeichnen die Menge der Farben der Leuchtschwerter mit $F = \{f_1, \ldots, f_7\}$. Wer welches Leuchtschwert mag, ist in der folgenden Tabelle angegeben. Dabei bedeutet ein Eintrag "✓" in Zeile i und Spalte j, dass p_i das Leuchtschwert mit der Farbe f_j mag. Der Eintrag "–" bedeutet, dass p_i die Farbe f_j nicht mag.

		Leuchtschwert-Farbe						
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
Fabian	(p_1)	✓	✓	-	✓	-	-	-
Jakob	(p_2)	-	-	✓	-	✓	-	-
Gennadij	(p_3)	-	✓	-	-	-	-	✓
Sascha	(p_4)	✓	-	-	✓	-	✓	✓
Nils	(p_5)	-	✓	-	-	-	-	✓
Peter	(p_6)	-	-	✓	-	✓	-	-

Modellieren Sie den Sachverhalt der Tabelle als bipartiten Graphen $G = (A \uplus B, E)$.

1. Geben Sie an, wie die Mengen A und B definiert sind. Erklären Sie außerdem, wann eine Kante $\{a, b\}$ mit $a \in A$ und $b \in B$ in E enthalten ist. / 2 Punkte

2. Zeichnen Sie den Graphen. Zeichnen Sie dabei Knoten aus A auf die linke Seite und Knoten aus B auf die rechte Seite. / 2 Punkte

3. Jeder soll nun genau ein Leuchtschwert auswählen, dessen Farbe er mag. Ein Leuchtschwert darf dabei nicht mehrfach ausgewählt werden.

   Geben Sie eine Zuordnung als Menge an, die diese Anforderung erfüllt. / 2 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

4. Gennadij hat leider das Leuchtschwert mit der Farbe f_7 kaputt gemacht.

   Zeigen Sie: Es ist nicht möglich jedem $p_i \in P$ genau ein $f_j \in F \setminus \{f_7\}$ zuzuweisen, so dass p_i das Leuchtschwert mit der Farbe f_j mag und jeder sein eigenes Leuchtschwert bekommt. / 4 Punkte

Aufgabe 6 (Grammatiken)

Teilaufgabe 6.1 (Grundlagen) **/ 3 Punkte**

Gegeben sei die folgende Grammatik $G = (T, N, P, A)$ mit $T = \{0, 1\}$, $N = \{A, B\}$ und

$$
\begin{aligned}
P = \{A &::= 00A1\ ,\\
A &::= 0A11\ ,\\
A &::= 11B0\ ,\\
B &::= 11B0\ ,\\
B &::= B00\ ,\\
B &::= \epsilon\ \}.
\end{aligned}
$$

Ist das Wort $w_1 = 11100$ in $L(G)$ enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort. / 3 Punkte

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 6.2 (Grammatik Konstruieren) **/ 8 Punkte**

Gegeben sei die Sprache

$$L = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \notin L_{ab}\} \ ,$$

wobei

$$L_{ab} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega = a^n b^m \text{ mit } n, m \geq 0\} \ .$$

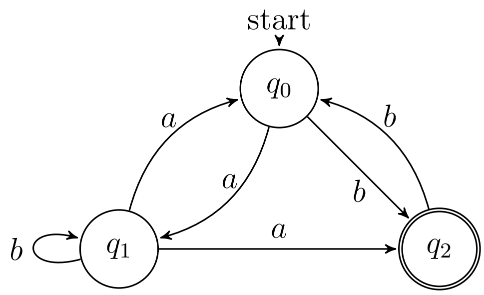
Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G als 4-Tupel $G = (T, N, P, S)$ mit $L(G) = L$ an. Geben Sie dabei G nicht in Backus-Naur-Form an und verwenden Sie höchstens 8 Ableitungsregeln.

Hinweis: Lösungen mit mehr als 8 Ableitungsregeln oder in Backus-Naur-Form werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 7 (Automaten)

Teilaufgabe 7.1 (NFA zu DFA) **/ 4 Punkte**

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische, endliche Automat (NFA) N:



Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Konstruktion, um N in einen deterministischen Automaten (DFA) $A = (\{a, b\}, \text{Pow}(\{q_0, q_1, q_2\}), \delta^A, q_0^A, F^A)$ mit $L(A) = L(N)$ umzuwandeln. Bestimmen Sie dafür explizit q_0^A, F^A und δ^A. Geben Sie dabei die Übergangsfunktion δ^A in tabellarischer Form an. Sie brauchen den Automaten A **nicht** zu zeichnen.

Name:	Matrikelnummer:

Teilaufgabe 7.2 (DFA Konstruieren) **/ 8 Punkte**

Gegeben Sei die Sprache

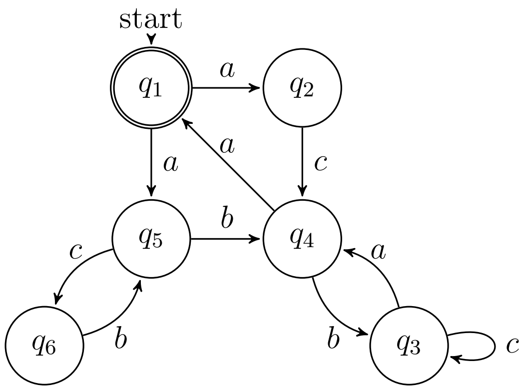
$$L_{ab} = \{\omega \in \{a, b\}^* | \ \omega \text{ beginnt mit einem } a \text{ und enthält nicht die Zeichenfolge } aba\} \ .$$

Zeichnen Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA), der L_{ab} akzeptiert und höchstens 8 Zustände hat.

Hinweise: Lösungen mit mehr als 8 Zuständen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 8 (Regulären Ausdruck Bestimmen) **/ 6 Punkte**

Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L(A)$ an, der aus höchstens 33 Zeichen besteht.

Hinweise: Reguläre Ausdrücke, die aus mehr als 33 Zeichen bestehen, werden mit 0 Punkten bewertet.