DFAs, NFAs und reguläre Ausdrücke

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.*
2. *Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.*
3. *Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.*

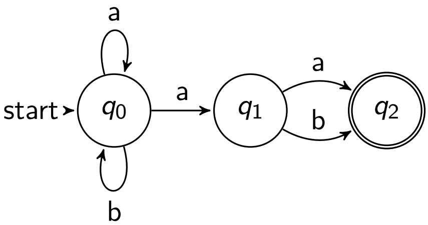
Beweisfolge: $(2) \Rightarrow (1), (1) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (2)$.

Definition 2

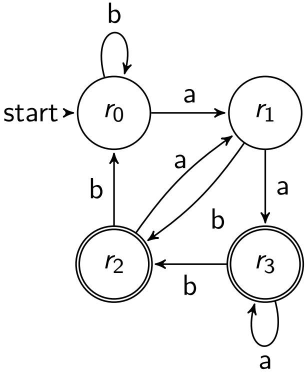
Sprachen, die die Bedingungen aus Satz 1 erfüllen, heißen regulär.

Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3:



DFA $\tilde{A}_3$:



$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist a}\}$

$L(\tilde{A}_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist a}\}$

Von NFAs zu DFAs

Die Konstruktion (Potenzmengenkonstruktion)

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA. Wir definieren den DFA $A = (\Sigma, Q^A, \delta^A, q_0^A, F^A)$ durch

- $Q^A := \mathrm{Pow}(Q)$,
- $q_0^A := \{q_0\}$,
- $F^A := \{R \in Q^A \mid R \cap F \neq \emptyset\}$,
- Für alle $a \in \Sigma, R \in \mathrm{Pow}(Q)$:

$$\delta^A(R, a) = \{q \in Q \mid \text{es gibt ein } r \in R \text{ mit } q \in \delta(r, a)\}.$$

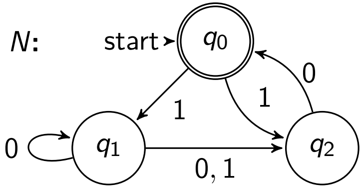
Äquivalente Definition für $\delta^A(\cdot)$

Für alle $a \in \Sigma, R \in \mathrm{Pow}(Q)$:

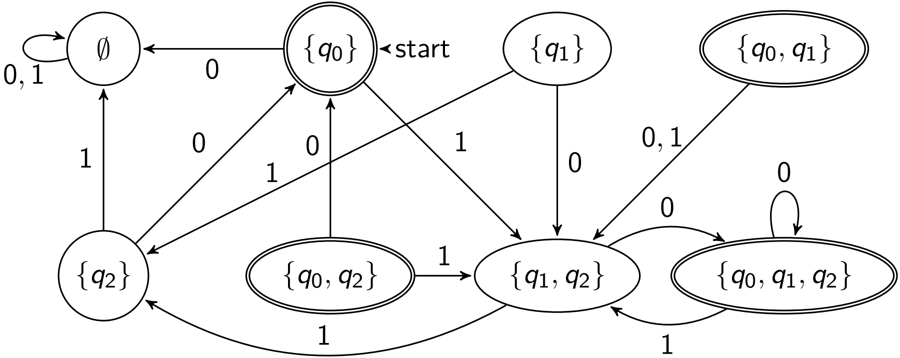
$$\delta^A(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a).$$

Von NFAs zu DFAs - ein Bespiel

NFA N**:**



DFA A**:**



Von NFAs zu DFAs - Korrektheit der Konstruktion

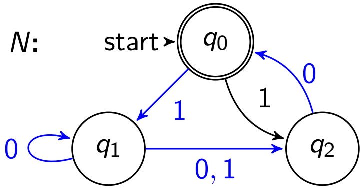
Beweis ($L(N) = L(A)$)

$$\begin{aligned} w \in L(N) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \delta^A(q_0^A, w) \in F^A \\ &\Leftrightarrow w \in L(A). \end{aligned}$$

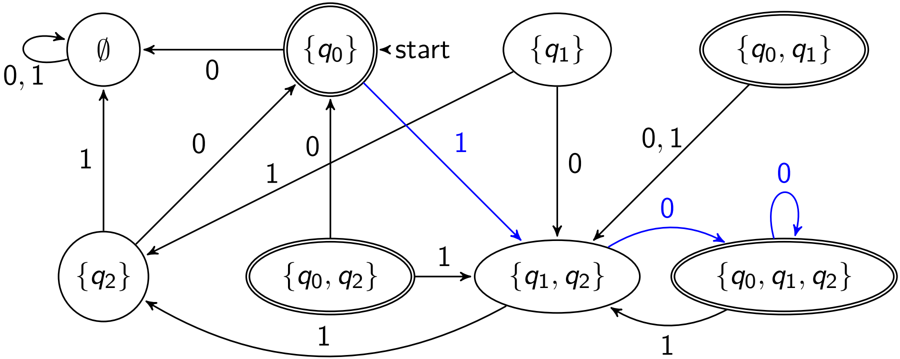
Von NFAs zu DFAs - ein Bespiel

$w = 1000$

NFA N:

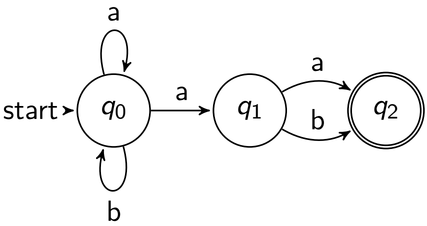


DFA A:



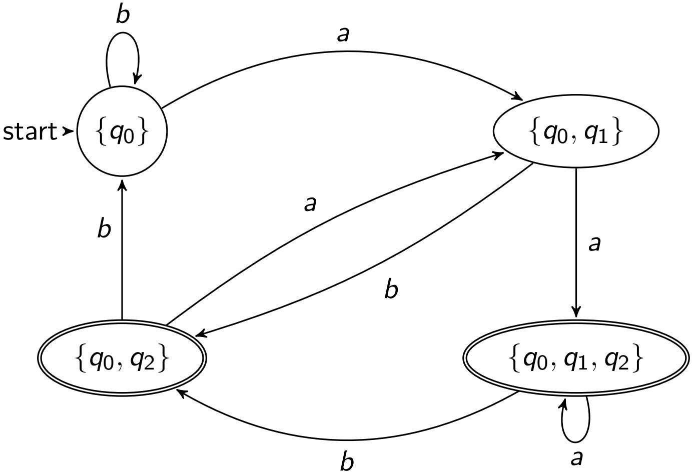
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3:



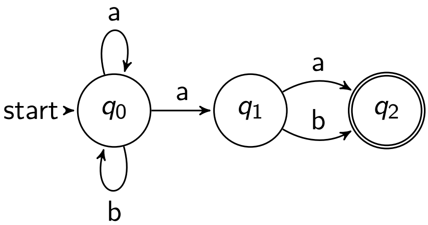
Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

DFA $\hat{A}_3$:

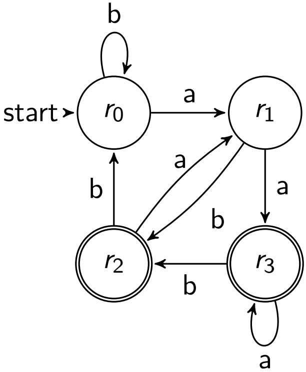


Von NFAs zu DFAs - ein Beispiel

NFA N_3:



DFA $\tilde{A}_3$:



$L(N_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist a}\}$

$L(\tilde{A}_3) = \{w \mid \text{das vorletzte Symbol in } w \text{ ist a}\}$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- *Vereinigung*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt*
- *Konkatenation*
- *Sternbildung*

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Beweis

Vereinigung: *(über NFAs)*

- L_1, L_2 *regulär, NFAs* N_1, N_2 *mit* $L(N_1) = L_1, L(N_2) = L_2$
- $N_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, r_0, F_1), N_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, s_0, F_2),$
  $Q_1 = \{r_0, \ldots, r_l\}, Q_2 = \{s_0, \ldots, s_m\}$
- *NFA* $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$*, wobei*
  - *Setze* $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$*, wobei* $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$
  - *Setze* $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{q_0\} & \textit{falls } \epsilon \in L_1 \cup L_2 \\ F_1 \cup F_2 & \textit{sonst} \end{cases}$
  - *Für alle* $a \in \Sigma$ *setze* $\delta(q_0, a) = \delta_1(r_0, a) \cup \delta_2(s_0, a)$
  - *Für alle* $(q, a) \in Q_1 \times \Sigma$ *setze* $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$
  - *Für alle* $(q, a) \in Q_2 \times \Sigma$ *setze* $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$

$\Rightarrow$ $L(N) = L_1 \cup L_2$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Beweis

Konkatenation: *(über NFAs)*

- L_1, L_2 *regulär, NFAs* N_1, N_2 *mit* $L(N_1) = L_1, L(N_2) = L_2$
- $N_1 = (\Sigma, Q_1, \delta_1, r_0, F_1), N_2 = (\Sigma, Q_2, \delta_2, s_0, F_2),$
  $Q_1 = \{r_0, \ldots, r_l\}, Q_2 = \{s_0, \ldots, s_m\}$
- *NFA* $N = (\Sigma, Q, \delta, r_0, F)$*, wobei*
  - *Setze* $Q = Q_1 \cup Q_2$ *und* $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 & \text{falls } \epsilon \in L_2 \\ F_2 & \text{sonst} \end{cases}$
  - *Für alle* $a \in \Sigma$ *setze* $\delta(r_0, a) = \begin{cases} \delta_1(r_0, a) \cup \delta_2(s_0, a) & \text{falls } \epsilon \in L_1 \\ \delta_1(r_0, a) & \text{sonst} \end{cases}$
  - *Für alle* $(q, a) \in Q_1 \times \Sigma$ *setze*
    $\delta(q, a) = \begin{cases} \delta_1(q, a) \cup \{s_0\} & \text{falls } \delta_1(q, a) \cap F_1 \neq \emptyset \\ \delta_1(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$
  - *Für alle* $(q, a) \in Q_2 \times \Sigma$ *setze* $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$

$\Rightarrow$ $L(N) = L_1 L_2$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Beweis

Sternbildung: *(über NFAs)*

- L *regulär, NFA* N' *mit* $L(N') = L$
- *es gibt NFA* $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ *mit* $L(N) = L \cup \{\epsilon\}$
- *NFA* $N^* = (\Sigma, Q, \delta^*, q_0, F)$*, wobei*
  - *Für alle* $(q, a) \in Q \times \Sigma$ *setze*
    $$\delta^*(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) \cup \{q_0\} & \text{falls } \delta(q, a) \cap F \neq \emptyset \\ \delta(q, a) & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $L(N^*) = L^*$

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- *Vereinigung*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt*
- *Konkatenation*
- *Sternbildung*

Beweis

Komplement: (über DFAs)

- $L \subseteq \Sigma^*$ regulär
- $A = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ vollständiger DFA mit $L(A) = L$.
- $\bar{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, Q \setminus F)$ DFA mit $L(\bar{A}) = \Sigma^* \setminus L$

$\Rightarrow$ $\Sigma^* \setminus L$ regulär

Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 3

Die regulären Sprachen sind abgeschlossen unter

- *Vereinigung*
- *Komplementbildung*
- *Durchschnitt*
- *Konkatenation*
- *Sternbildung*

Beweis

Durchschnitt: (über Vereinigung und Komplement)

- L_1, L_2 regulär, $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2)$
- $\Sigma^* \setminus L_1$, $\Sigma^* \setminus L_2$ regulär
- $\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2$ regulär

$\Rightarrow$ $L_1 \cap L_2 = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L_1 \cup \Sigma^* \setminus L_2)$ regulär

DFAs, NFAs und reguläre Ausdrücke

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.*
2. *Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.*
3. *Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.*

Beweis ((3) $\Rightarrow$ (2))

Sei R ein regulärer Ausdruck über Alphabet Σ.

- Für $R = \emptyset$ oder $R = a$ mit $a \in \Sigma \cup \epsilon$, so gibt es einen NFA N mit $L(R) = L(N)$.
- Ist $R = R_1 \mid R_2$ oder $R = R_1 R_2$ für reguläre Ausdrücke R_1, R_2, so gibt es NFAs N_1, N_2 mit $L(N_1) = L(R_1)$ und $L(N_2) = L(R_2)$. Damit gibt es nach Beweis für Satz 3 NFA N mit $L(N) = L(R)$.

DFAs, NFAs und reguläre Ausdrücke

Satz 1

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *Es gibt einen DFA A mit $L = L(A)$.*
2. *Es gibt einen NFA N mit $L = L(N)$.*
3. *Es gibt einen regulären Ausdruck R mit $L = L(R)$.*

Beweis ((3) $\Rightarrow$ (2))

- Ist $R = R_1^*$ für einen regulären Ausdrücke R_1, so gibt es einen NFA N_1 mit $L(N_1) = L(R_1)$. Damit gibt es nach Beweis für Satz 3 NFA N mit $L(N) = L(R)$.
- Ist $R = (R_1)$ für einen regulären Ausdruck R_1, so gibt es einen NFA N_1 mit $L(N_1) = L(R_1)$. Da $L(R) = L(R_1)$, gilt dann auch $L(N_1) = L(R)$.

Grenzen von Automaten und regulären Ausdrücken

Satz 3

1. *Die Sprache* $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ *ist nicht regulär.*
2. *Die Sprache* $\{1^{n^2} \mid n \geq 1\}$ *ist nicht regulär.*
3. *Die Sprache* $\{1^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ *ist nicht regulär.*
4. *Die Sprache bestehend aus korrekten Klammerausdrücken ist nicht regulär.*

Pumping Lemma

Satz 4

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$ eine Aufteilung von x in 3 Teile $u, v, w \in \Sigma^*, x = uvw$ existiert mit:

1. $|uv| \leq p$
2. $|v| \geq 1$
3. *für alle $i \geq 0$ liegt das Wort $uv^i w$ in L.*

Beweis und Illustration Pumping Lemma

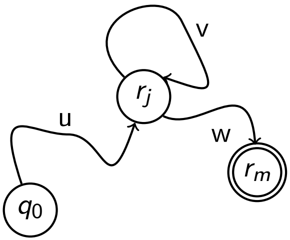
Beweis.

- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA mit $L(A) = L$.
- Setzen $p := |Q|$.
- $x = x_1 \cdots x_m \in L$ beliebig mit $|x| = m \geq p$.
- Seien $q_0 = r_0, r_1, \ldots, r_m$ die Zustände, die A bei Eingabe x durchläuft.
- Es existieren $i, j, 0 \leq i, j \leq p, i < j$, mit $r_i = r_j$
- Setzen

$$u := x_1 \cdots x_i, v := x_{i+1} \cdots x_j,$$

$$w := x_{j+1} \cdots x_m$$

- Eigenschaften 1 und 2 damit erfüllt $\square$



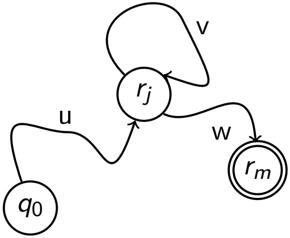
Beweis und Illustration Pumping Lemma

Beweis.

- $\delta(q_0, u) = r_i = r_j, \;\; \delta(r_j, v) = r_j,$
  $\delta(r_j, w) = r_m \in F$
- Für $i = 0$:

$$\begin{aligned}\delta(q_0, uv^0w) &= \delta(q_0, uw)\\ &= \delta(\delta(q_0, u), w)\\ &= \delta(r_j, w)\\ &= r_m \in F\end{aligned}$$

□

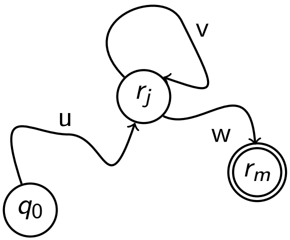


Beweis und Illustration Pumping Lemma

Beweis.

- $\delta(q_0, u) = r_i = r_j, \;\; \delta(r_j, v) = r_j$
  $\delta(r_j, w) = r_m \in F$
- Für $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, uv^i w) &= \delta(\delta(q_0, u), v^i w) \\
&= \delta(r_j, v^i w) \\
&= \delta(\delta(r_j, v), v^{i-1} w) \\
&= \delta(r_j, v^{i-1} w) \\
&\;\vdots \\
&= \delta(r_j, vw) \\
&= \delta(\delta(r_j, v), w) \\
&= \delta(r_j, w) = r_m \in F. \qquad \square
\end{aligned}$$



Pumping Lemma und Kontraposition

Ist L regulär, so gilt:

Es existiert ein $p \in \mathbb{N}$,
so dass für alle $x \in L$ mit $|x| \geq p$
eine Aufteilung $x = uvw$ existiert
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
wobei für alle $i \geq 0$
$uv^i w \in L$.

L ist nicht regulär, wenn

Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen $x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 1

Satz 5

Die Sprache $L_1 := \{0^n 1^n | n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis.

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $x = 0^p 1^p$, also $x \in L_1$.
- Für jede Aufteilung $x = uvw$ mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$ gilt $v = 0^k$ mit $1 \leq k \leq p$.
- Wählen $i = 2$.
- Damit $uv^i w = 0^{p+k} 1^p$ und $uv^i w = uv^2 w \notin L_1$.

$\Rightarrow$ L_1 ist nicht regulär.

□

L ist nicht regulär, wenn
Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen
$x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 2

Satz 6

Die Sprache $L_2 := \{1^{n^2} | n \geq 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Sei $x = 1^{p^2}$, also $x \in L_2$.
- Sei $x = uvw$ eine beliebige Aufteilung von x mit $|uv| \leq p$ und $1 \leq |v| \leq p$.
- Wählen $i = 2$.
- $uv^iw = 1^{|x|+|v|} = 1^{p^2+|v|}$

L ist nicht regulär, wenn
Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen
$x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^iw \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 2

L ist nicht regulär, wenn
Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen
$x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^iw \notin L$.

- $p^2 + |v| > p^2$
- $p^2 + |v| \leq p^2 + p < (p+1)^2$
- $p^2 + |v|$ kein Quadrat und $uv^iw \notin L_2$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 3

Satz 7

Die Sprache $L_3 := \{1^q | q \text{ Primzahl}\}$ ist nicht regulär.

Beweis

- $p \in \mathbb{N}$ beliebig und $q \geq p + 2$ Primzahl
- Sei $x = 1^q$, also $x \in L_3$.
- Sei $x = uvw$ eine beliebige Aufteilung von x mit $|uv| \leq p$ und $|v| \geq 1$.
- $|uv| \leq p, q \geq p + 2 \Rightarrow |uw| \geq 2$
- Wählen $i = |uw|$.

L ist nicht regulär, wenn
Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen
$x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^i w \notin L$.

Anwendung Pumping Lemma - Beispiel 3

L ist nicht regulär, wenn
Für alle $p \in \mathbb{N}$
existiert ein $x \in L$ mit $|x| \geq p$,
so dass für alle Aufteilungen
$x = uvw$
mit $|uv| \leq p, |v| \geq 1$
ein $i \geq 0$ existiert,
so dass $uv^iw \notin L$.

- Somit

$$\begin{aligned} uv^iw &= 1^{|uw|+i|v|} \\ &= 1^{|uw|+|uw||v|} \\ &= 1^{(|v|+1)|uw|} \end{aligned}$$

- $|uw|, |v| + 1 \geq 2$
- $(|v| + 1)|uw|$ keine Primzahl

$\Rightarrow$ $uv^iw = 1^{(|v|+1)|uw|} \notin L_3$