Nichtdeterministische endliche Automaten

- In manchen Modellierungen ist die Forderung, dass δ eine Funktion von $Q \times \Sigma \to Q$ ist, zu restriktiv.
- Man möchte zulassen, dass für Paare $(q, a) \in Q \times \Sigma$ mehrere Übergänge möglich sind, ohne dass festgelegt wird, welcher der möglichen Übergänge gewählt wird.
- Diese Entscheidungsfreiheit wird Nichtdeterminismus genannt und führt zu nichtdeterministischen endlichen Automaten (NFAs).
- NFAs sind in der Modellierung von Prozessen häufig einfacher aufzustellen und leichter zu verstehen.
- Reale Maschine haben nicht die Eigenschaft des Nichtdeterminismus.
- Allerdings kann jeder NFA in einen DFA umgewandelt werden, der sich „gleich verhält".
- Nichtdeterminismus spielt in der (theoretischen) Informatik eine große Rolle.

Potenzmengen

Ist M eine endliche Menge, so bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Pow}(M) := \{U \mid U \subseteq M\}$$

die **Potenzmenge** von M.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Definition 1

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NFA) N ist ein 5-Tupel $(\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$, wobei

- Σ ein endliches Alphabet ist,
- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathrm{Pow}(Q)$ die (totale)Übergangsfunktion ist,
- q_0 der Startzustand ist,
- $F \subseteq Q$ die Menge von Endzuständen (auch: akzeptierenden Zuständen) ist.

Nichtdeterministische endliche Automaten

Bemerkungen

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein NFA.

- Die Funktion δ ist immer total.
- Sei $(q, a) \in Q \times \Sigma$. Gilt $\delta(q, a) = U \in \mathrm{Pow}(Q)$, so kann N aus dem Zustand q unter Symbol a in jeden Zustand $r \in U$ gehen.
- Elemente in U heißen **mögliche Nachfolgezustände** von q unter a.
- Ist $\delta(q, a) = \emptyset$, so gibt es für q unter a keinen Nachfolgezustand.
- Dieses entspricht den nicht definierten Funktionswerten $\delta(q, a) = -$ bei DFAs.

Beispiele

NFA N_1 definiert durch:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$F = \{q_3\}$$

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

Beispiele

NFA N_2 definiert durch:

$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$q_0 = 0$$
$$F = \{4\}$$

δ	a	b
0	$\emptyset$	$\{1\}$
1	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{2, 3\}$	$\{2\}$
3	$\{4\}$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\emptyset$

Beispiele

NFA N_3 definiert durch:

$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$F = \{q_2\}$$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Graphische Darstellung von NFAs

NFAs und Graphen

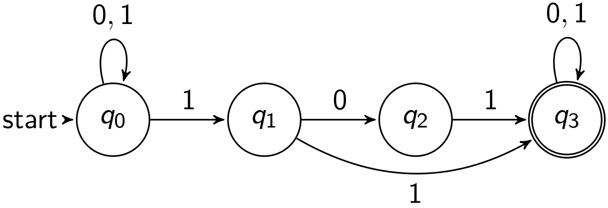
- pro Zustand ein Knoten, jeweils markiert mit Zustand, Startzustand und Endzustände gekennzeichnet
- Kante (q, r) markiert mit $a \in \Sigma$ genau dann, wenn $r \in \delta(q, a)$
- erhalten Multigraphen, da Kanten sich nur durch Markierung unterscheiden können

Graphische Darstellung von NFAs - Beispiele

NFA N_1 definiert durch:

$$\Sigma = \{0, 1\}$$
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$
$$F = \{q_3\}$$

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$

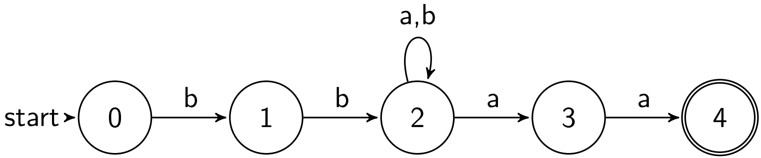


Graphische Darstellung von NFAs - Beispiele

NFA N_2 definiert durch:

$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{0,1,2,3,4\}$$
$$q_0 = 0$$
$$F = \{4\}$$

δ	a	b
0	$\emptyset$	$\{1\}$
1	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{2,3\}$	$\{2\}$
3	$\{4\}$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\emptyset$

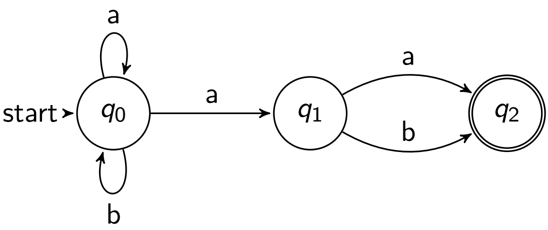


Graphische Darstellung von NFAs - Beispiele

NFA N_3 definiert durch:

$$\Sigma = \{a, b\}$$
$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$
$$F = \{q_2\}$$

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$



Erweiterung von Übergangsfunktionen

Um das Verhalten eines NFAs $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ bei Folgen von Symbolen zu beschreiben, erweitern wir die Übergangsfunktion.

Definition 2

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat. Dann wird die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathrm{Pow}(Q)$ rekursiv wie folgt definiert:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\} \quad \text{für alle } q \in Q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \{q' \,\big|\, \exists p \in Q : p \in \hat{\delta}(q, w) \text{ und } q' \in \delta(p, a)\}$$

$$\text{für alle } q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma.$$

Bemerkungen:

1. Wir unterscheiden häufig nicht zwischen δ und $\hat{\delta}$ und schreiben auch δ für die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta}$.
2. Haben $\hat{\delta}$ auch für Paare $(q, \epsilon), q \in Q$ definiert.

Erweiterung von Übergangsfunktionen

Definition 2

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat. Dann wird die erweiterte Übergangsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathrm{Pow}(Q)$ rekursiv wie folgt definiert:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\} \quad \text{für alle } q \in Q$$

$$\hat{\delta}(q, wa) = \{q' \mid \exists p \in Q : p \in \hat{\delta}(q, w) \text{ und } q' \in \delta(p, a)\}$$

$$\text{für alle } q \in Q, w \in \Sigma^*, a \in \Sigma.$$

Alternative Formulierungen

Für $q, q' \in Q$ und $w = a_1 \cdots a_n$, $a_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$, gilt

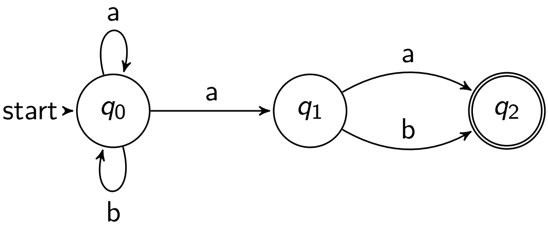
1. $$\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{r \in \delta(q, a_1 \cdots a_{n-1})} \delta(r, a_n)$$

2. $q' \in \hat{\delta}(q, w)$ genau dann, wenn es $r_0, \ldots, r_n \in Q$ gibt mit $r_0 = q, r_n = q'$ und $r_{i+1} \in \delta(r_i, a_{i+1}) \quad \text{für } i = 0, \ldots, n-1$.

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiel

$\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{r \in \delta(q, a_1 \cdots a_{n-1})} \delta(r, a_n)$

NFA N_3:

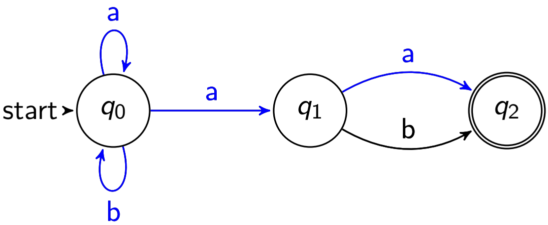


$$
\begin{aligned}
&\delta(q_0, a) && = \{q_0, q_1\} \\
&\delta(q_0, ab) = \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) = \{q_0\} \cup \{q_2\} && = \{q_0, q_2\} \\
&\delta(q_0, aba) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset && = \{q_0, q_1\} \\
&\delta(q_0, abaa) = \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) = \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} && = \{q_0, q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiel

$\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{r \in \delta(q, a_1 \cdots a_{n-1})} \delta(r, a_n)$

NFA N_3:

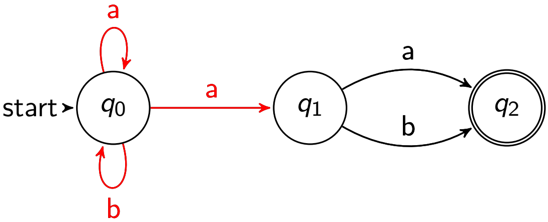


$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a) & & &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_0, ab) &= \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) &= \{q_0\} \cup \{q_2\} &= \{q_0, q_2\} \\
\delta(q_0, aba) &= \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) &= \{q_0, q_1\} \cup \emptyset &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_0, abaa) &= \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) &= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} &= \{q_0, q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

Erweiterung von Übergangsfunktionen - Beispiel

$\hat{\delta}(q, w) = \bigcup_{r \in \delta(q, a_1 \cdots a_{n-1})} \delta(r, a_n)$

NFA N_3:



$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, a) & & &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_0, ab) &= \delta(q_0, b) \cup \delta(q_1, b) &= \{q_0\} \cup \{q_2\} &= \{q_0, q_2\} \\
\delta(q_0, aba) &= \delta(q_0, a) \cup \delta(q_2, a) &= \{q_0, q_1\} \cup \emptyset &= \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_0, abaa) &= \delta(q_0, a) \cup \delta(q_1, a) &= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2\} &= \{q_0, q_1, q_2\}
\end{aligned}
$$

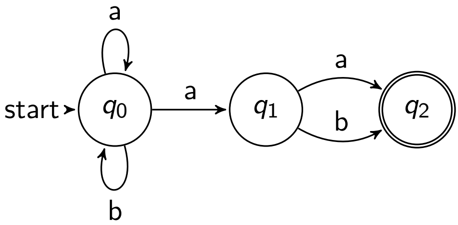
Nichtdeterministische Automaten und Sprachen

Definition 3

Sei $N = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat.

- Der NFA N akzeptiert das Wort $w \in \Sigma^*$ genau dann, wenn $\delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$.
- Die Menge
$$L(N) := \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$
heißt die von N akzeptierte Sprache.

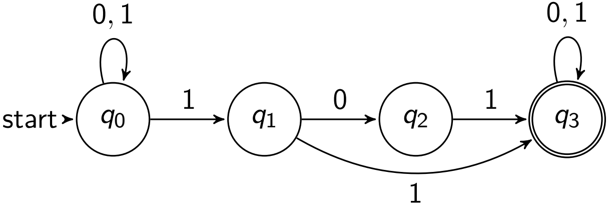
NFA N_3:



$L(N_3) = \{w \mid$ das vorletzte Symbol in w ist a$\}$

Nichtdeterministische Automanten und Sprachen

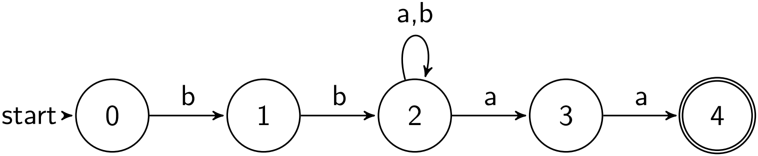
NFA N_1:



$L(N_1) = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält die Teilfolge 101 oder die Teilfolge 11}\}$

Nichtdeterministische Automanten und Sprachen

NFA N_2:



$L(N_2) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } bb \text{ und endet mit } aa\}$