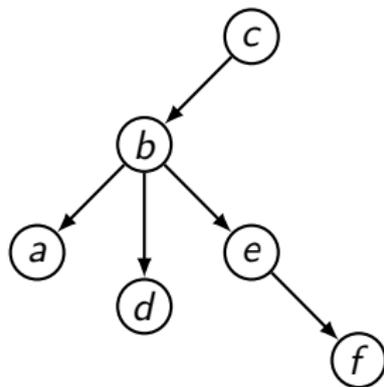


Wurzelbäume

Definition 1

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein gerichteter azyklischer Graph, in dem genau ein Knoten w Eingangsgrad 0 besitzt und alle anderen Knoten Eingangsgrad 1 besitzen. Knoten w heißt die Wurzel des Graphen.



Wurzelbaum mit Wurzel c

Wurzelbäume

Alternative Definition

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein Paar (T, w) , wobei $T = (V, E)$ ein ungerichteter Baum ist und $w \in V$ ein Knoten ist. Knoten w heißt die Wurzel des Graphen.

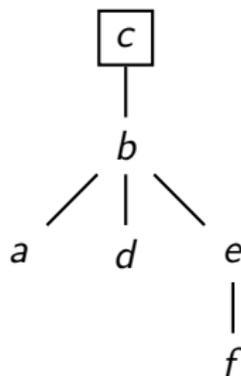
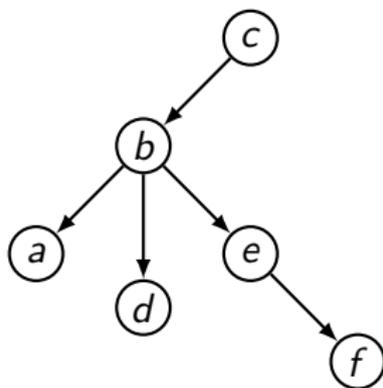
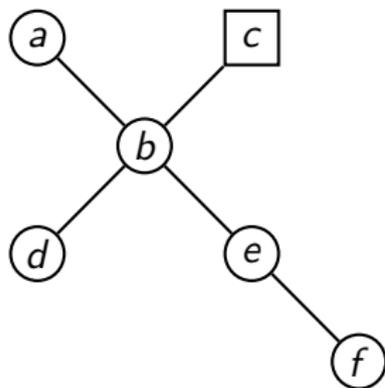
Von ungerichtet zu gerichtet

- In T gibt es für jeden Knoten $v \in V$ einen eindeutigen Pfad von w zu v .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten $v \in V$ ein gerichteter Pfad von w zu v führt.

Wurzelbäume

Von ungerichtet zu gerichtet

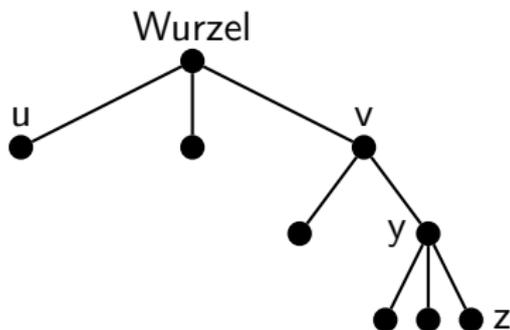
- In T gibt es für jeden Knoten $v \in V$ einen eindeutigen Pfad von w zu v .
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten $v \in V$ ein gerichteter Pfad von w zu v führt.



Grundlegende Begriffe

Sei (T, w) , $T = (V, E)$, ein Wurzelbaum und $v \in V$.

- Die Knoten auf dem Pfad P von w zu v heißen **Vorgänger** von v .
- Der zu v benachbarte Knoten auf P heißt **unmittelbarer Vorgänger**, auch **Vater** oder **Elter**, von v .
- Knoten u , so dass v auf dem Pfad von w zu u liegt, heißen **Nachfolger** von v .
- Ein mit v durch eine Kante verbundener Nachfolger heißt **unmittelbarer Nachfolger**, auch **Sohn** oder **Kind** von v .



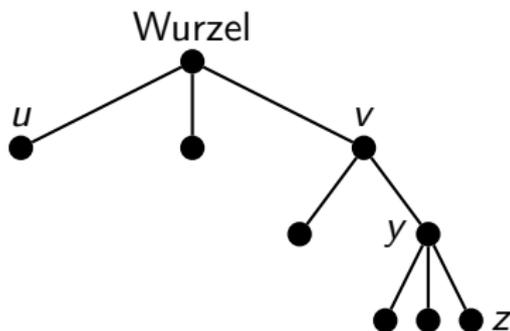
- v ist Vorgänger von z .
- v ist unmittelbarer Vorgänger von y .
- u ist Nachfolger der Wurzel.
- y ist unmittelbarer Nachfolger von v .

Höhe von Bäumen

Definition 2

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum und $v \in V$ ein Knoten. Die Höhe von v ist die maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in T mit Anfangsknoten v .

Die Höhe von T ist die Höhe der Wurzel von T .



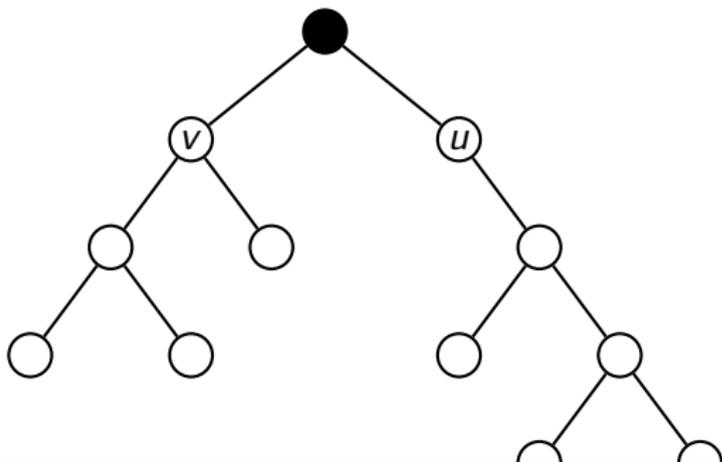
- v hat Höhe 2.
- u hat Höhe 0.
- Der Baum hat Höhe 3.

Höhe von Bäumen

Definition 2

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum und $v \in V$ ein Knoten. Die Höhe von v ist die maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in T mit Anfangsknoten v .

Die Höhe von T ist die Höhe der Wurzel von T .



- v hat Höhe 2.
- u hat Höhe 3.
- Der Baum hat Höhe 4.

Binäräume

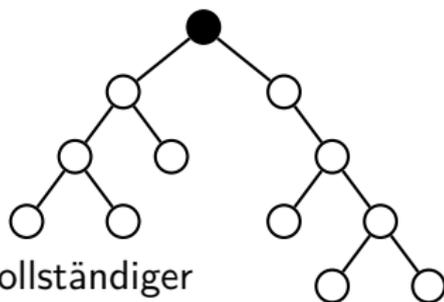
Definition 3

Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.

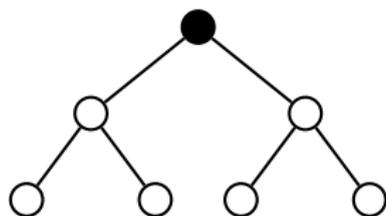
Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem

- 1 jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei unmittelbare Nachfolger hat
- 2 alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Einen Binärbaum, der nicht vollständig ist, nennen wir unvollständig.



unvollständiger
Binärbaum



vollständiger Binärbaum
der Höhe 2

Binärbäume

Satz 4

Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis

Induktion über h

Induktionsanfang $h = 0$

- Baum der Höhe 0 besitzt
- $1 = 2^1 - 1$ Knoten
- $1 = 2^0$ Blätter

Satz 4

Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis

Induktionsvoraussetzung Satz korrekt für Bäume der Höhe $\leq h$.

Induktionsschritt $h \rightarrow h + 1$

- T vollständiger binärer Baum der Höhe $h + 1$ und mit Wurzel w
- w Wurzel mit direkten Nachfolgern w_1 und w_2
- w_i und seine Nachfolger sind vollständiger Baum T_i der Höhe h , $i = 1, 2$
- T_i besitzt 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten, $i = 1, 2$
- Anzahl der Blätter von T ist Summe der Anzahl der Blätter von T_1 und T_2
- Anzahl der Blätter ist $2^h + 2^h = 2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$

Binärbäume

Satz 4

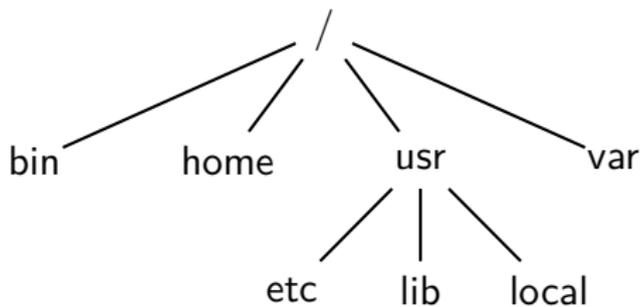
Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis

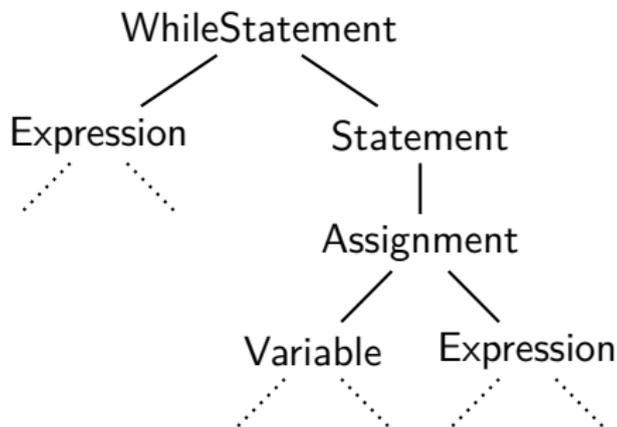
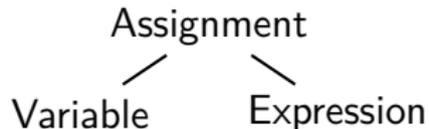
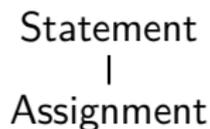
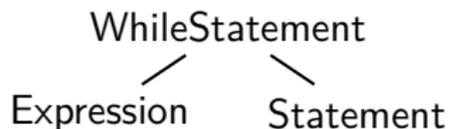
Induktionsschritt $h \rightarrow h + 1$

- T_i besitzt 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten, $i = 1, 2$
- Anzahl der Knoten von T ist Summe der Anzahl der Knoten von T_1 und T_2 plus 1 (für w),
- Anzahl der Knoten ist
$$2^{h+1} - 1 + 2^{h+1} - 1 + 1 = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$$

Beschreibung von Strukturen - Dateisysteme



Beschreibung von Strukturen - Programmkonstrukte



Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

- Ein Handlungsreisender möchte auf einer Rundreise n Städte besuchen.
- Die Städte sind mit Straßen einer gewissen Länge verbunden. Manche Städte können von anderen Städten eventuell nicht direkt erreicht werden.
- Gesucht ist eine Tour minimaler Länge, die jede Stadt genau einmal besucht.

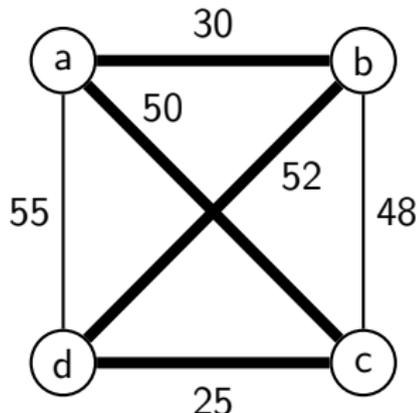
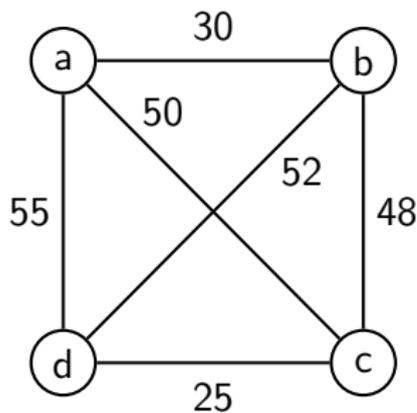
Modellierung durch Graphen:

- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \rightarrow \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

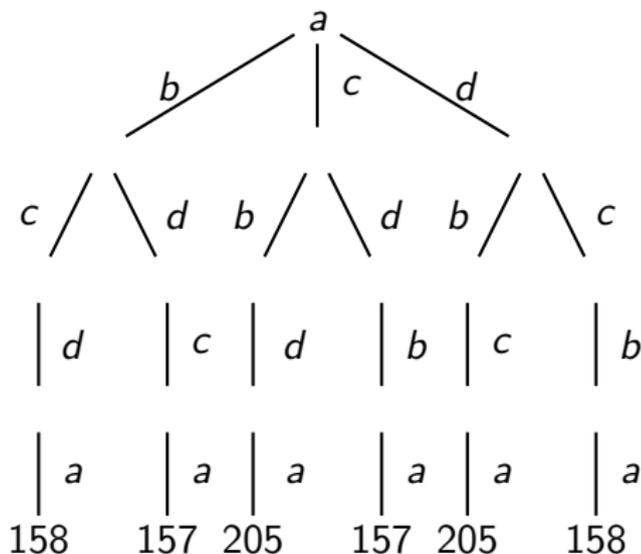
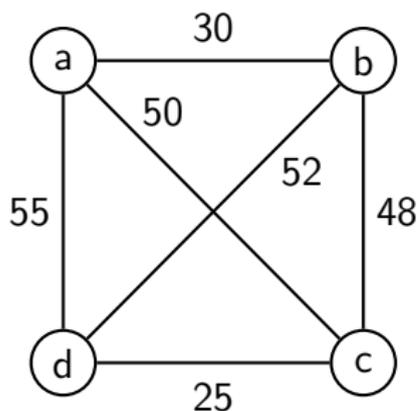
Modellierung durch Graphen:

- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \rightarrow \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.



Kreis der Länge 157

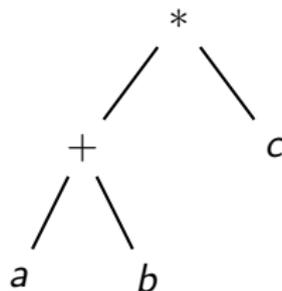
Entscheidungsbaum



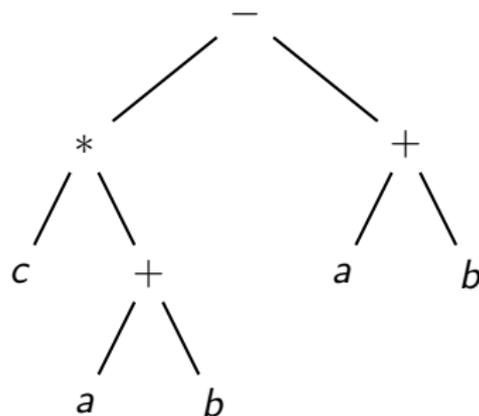
- Ein Entscheidungsbaum spannt alle potentielle Lösungen einer Aufgabe auf.
- Die Lösungen werden durch die Blätter charakterisiert.
- Der Pfad zu einem Blatt beschreibt die Entscheidungen, die zu diesem Blatt (Lösung) führen.

Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- dienen zur Beschreibung der Struktur von arithmetischen Termen und Ausdrücken
- Knoten repräsentieren Variablen, Konstanten und Operatoren
- Kanten verbinden diese mit ihren Operanden



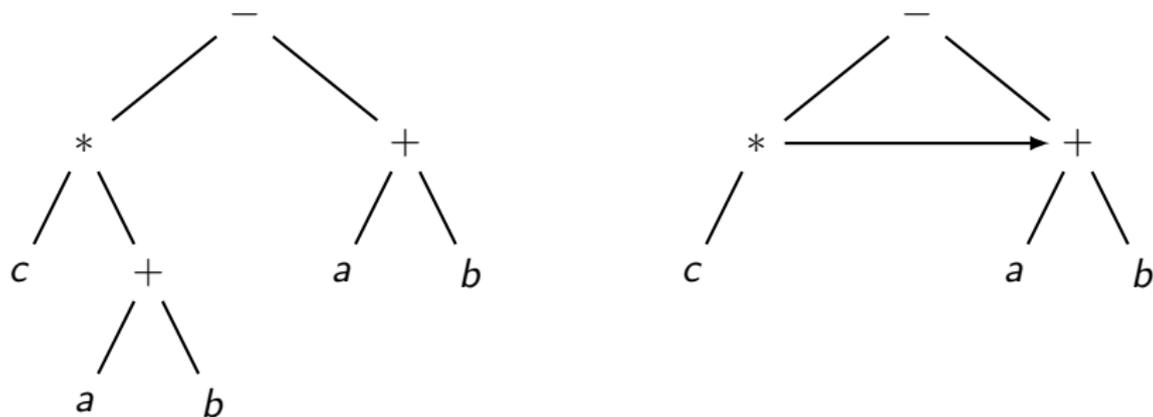
$$(a + b) * c$$



$$(a + b) * c - (a + b)$$

Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

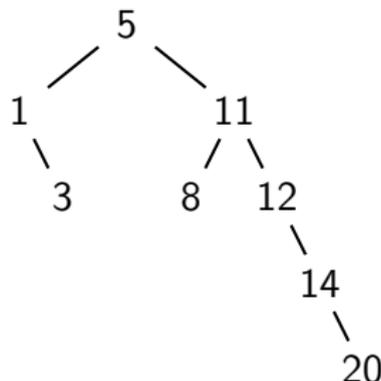
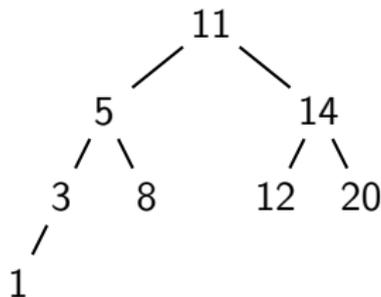
- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.



- Der Baum wird dadurch zu einem gerichteten, kreisfreien Graphen.
- Eingesetzt z.B. von Compilern, um Code zu erzeugen, der gleiche Teilausdrücke nur einmal auswertet.

Suchbäume

- Binäre Bäume $T = (V, E)$ mit $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten v gilt
 - 1 alle rechten Nachfolger von v sind größer als v
 - 2 alle linken Nachfolger von v sind kleiner als v



- gut geeignet, um Anfrage „ $x \in V?$ “ zu beantworten
- sollten möglichst balanciert sein

Zusammenfassung Graphen

Problemklassen

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- hierarchische Strukturen
- verzweigte Abläufe
- Anordnung in Folgen

Knoten- und Kantenmarkierungen

- Entfernung, Kosten, Gewinn
- Färbung \doteq disjunkte Knotenmengen
- Symbole einer Sprache

Knoten- und Kantenbedeutung

- verbunden, benachbart,
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- besteht aus, enthält, ist-ein
- verzweigte Abläufe
- Relation