Übersicht

Grundlagen für alle anderen formalen Kalküle

1. Mengen
2. Induktive Definitionen, induktive Beweise
3. Potenzmengen
4. Kartesisches Produkt, Tupel
5. Folgen
6. Relationen
7. Funktionen

Mengen

Mengen: Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge; „a ist Element der Menge" schreiben wir als $a \in M$.

$M = \{a, b, c\}$, a, b und c sind die Elemente der Menge M
$M = \{wert, (a, c)\}$, die Elemente sind $wert$ und (a, c)
$M = \{\{a\}, \{b, \{c, a\}\}\}$, die Elemente sind $\{a\}$ und $\{b, \{c, a\}\}$

Definition 1

Die leere Menge wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.
Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt **Kardinalität** von M. Dafür schreiben wir auch $\mathrm{Card}(M)$ oder $|M|$.

Beispiel: $|\{a, b, c\}| = 3$ und $|\emptyset| = 0$
Vereinbarung: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ beginnen mit der Zahl 1, also $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Wenn wir die 0 dazunehmen möchten, dann schreiben wir $\mathbb{N}_0$.

Russels Paradoxon, Russelsche Antinomie

Sei P die Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, also $P = \{x : x \notin x\}$. Dann führt die Frage „Ist P Element von P?“ zum Widerspruch.

> Fall 1: Sei P ein Element der Menge P. Dann gilt nach Definition $P \notin P$, also ein Widerspruch.
>
> Fall 2: Sei P kein Element von P, also $P \notin P$ und damit nach Definition $P \in P$. Dieser Fall ist auch nicht möglich.

Führte zur Ersetzung der naiven durch eine axiomatische Mengenlehre (siehe z. B. Fundierungsaxiom in der Zermelo-Fraenkel Mengenlehre); Russel selbst schlug eine Typentheorie mit eingeschränkter Syntax vor.

Wir vermeiden den Widerspruch durch folgende Annahme: Wir gehen immer davon aus, dass eine Grundmenge bekannt ist, aus der die Elemente der Mengen stammen.

Mengenoperationen

Definition 2

1. $M \subseteq N$: M ist Teilmenge von N gdw.
   für alle $a \in M$ auch $a \in N$ gilt.
2. $M = N$: M und N sind gleich gdw.
   $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.
3. $M \subset N$: M ist echte Teilmenge von N gdw.
   $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.
4. $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ (Vereinigung)
5. $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ (Durchschnitt)
6. $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ (Differenz)
7. M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$.

Definition von Mengen

1. **extensionale** Definition: Angabe der Elemente
   Beispiel: $M := \{x, y, a, d\}$
2. **intensionale** Definition: Angabe einer Eigenschaft $M := \{a : E(a)\}$
   Beispiel für $E(x)$: $x \in \mathbb{N}$ und x ist Quadratzahl und $x \leq 30$
   $$M := \{x : E(x)\} = \{x : x \in \mathbb{N},\ x \text{ ist Quadratzahl}, x \leq 30\}$$
3. **induktive** Definition:
   Ausgehend von Anfangselementen werden mit Regeln weitere Elemente bestimmt.

   Beispiel:

   Anfangselemente: $2, 3 \in M$.
   Regel: Falls $x \in M$, dann auch $x + 4 \in M$.
   Nur so gebildete Zahlen sind in M.

Induktive Definitionen

Induktive Definition einer Menge M:

(1) Anfangselemente: $c_1, \ldots, c_k \in M$

(2) Folgeelemente:
$f_1, \ldots, f_r$ seien feste s-stellige Funktionen

- seien $x_1, \ldots, x_s \in M$, dann ist auch $f_1(x_1, \ldots, x_s) \in M$
- ...
- ...
- seien $x_1, \ldots, x_s \in M$, dann ist auch $f_r(x_1, \ldots, x_s) \in M$

(3) Nur die mit (1) und (2) erzeugten Elemente gehören zu M.

Beispiele für induktiv definierte Mengen

Natürliche Zahlen:
Anfangselement: $1 \in M$
Folgeelemente: $x \in M$, dann ist auch $x + 1 \in M$

Menge von Zahlen:
Anfangselemente: $3, 5 \in M$
Folgeelemente:
$x \in M$, dann ist auch $x + 4 \in M$
$x \in M$, dann ist auch $x + 5 \in M$

Menge von Worten:
Anfangselemente: $aac, abaa \in M$
Folgeelemente:
1. $w_1, w_2 \in M$, dann auch $aw_1baw_2 \in M$
2. $w \in M$, dann auch $aw \in M$

Induktionsbeweise: Natürliche Zahlen

Satz 3

Für alle $n \geq 1$ gilt die Eigenschaft $E(n)$.
Für alle $n \geq 1$ gilt $n^2 \geq n$. Die Eigenschaft ist $E(n)$ ist $n^2 \geq n$.

Beweis

1. *Induktionsanfang (IA): Zeige die Eigenschaft $E(n)$ für $n = 1$*
   Es gilt offensichtlich $1^2 = 1$. Also ist der Induktionsanfang gezeigt.
2. *Induktionsschritt (IS): $(n \to n + 1)$*
   Zeige, dass die Eigenschaft $E(n + 1)$ gilt, wobei ausgenutzt werden kann, dass die Induktionsvoraussetzung (IV) $E(n)$ gilt.
   Es ist zu zeigen, dass $(n + 1)^2 \geq (n + 1)$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung ist $n^2 \geq n$.
   Es gilt $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir
   $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq_{IV} n + 2n + 1 \geq n + 1.$
3. *Den Beweis beenden wir mit q.e.d.*

Induktionsbeweise: Induktiv definierte Mengen

Satz 4

Für alle $x \in M$ gilt $E(x)$.

M sei induktiv definiert.

Beweis

1. *Induktionsanfang (IA): Zeige die Eigenschaft E für alle Anfangselemente von M.*
2. *Induktionsschritt (IS): (Regelanwendungen)*
   Zeige für jede Regel: „$x_1, \dots x_s \in M$ dann auch $f_i(x_1, \dots, x_s) \in M$“, dass die Eigenschaft $E(f_i(x_1, \dots, x_s))$ gilt.
   Die Induktionsvoraussetzung (IV), die für den Beweis ausgenutzt werden kann, ist, dass $E(x_1), \dots, E(x_s)$ gilt.
3. *Den Beweis beenden wir mit q.e.d.*

Anfangselemente: $aac, abaa \in M$
Folgeelemente: 1. $w_1, w_2 \in M$, dann auch $aw_1baw_2 \in M$
2. $w \in M$, dann auch $aw \in M$

Satz 5

Jedes Wort aus M enthält mehr Buchstaben a als Buchstaben b.

Beweis

Induktionsbeweis
Induktionsanfang (IA): Offensichtlich gilt für die Anfangselemememente aac und abaa die Eigenschaft.
Induktionsschritt (IS):
Regel 1: Sei $v \in M$ mit der Regel 1 erzeugt, also $v = aw_1baw_2$. Die Induktionsvoraussetzung (IV) ist, dass die Eigenschaft für w_1 und w_2 gilt. Dann gilt offensichtlich auch die Eigenschaft für v.
Regel 2: Sei $v \in M$ mit der Regel 2 erzeugt, also $v = aw$. Die IV ist, dass die Eigenschaft für w gilt. Es gilt dann auch die Eigenschaft für v.
q.e.d.

Potenzmenge

Definition 6

Sei M eine Menge, dann ist die Potenzmenge (power set) von M definiert als $\mathrm{Pow}(M) := \{U : U \subseteq M\}$.

Beispiel:

1. $M = \{a, b\}$
   $\mathrm{Pow}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\emptyset$ ist die leere Menge.
2. $M = \emptyset$, dann ist $\mathrm{Pow}(M) = \{\emptyset\}$

Kardinalität der Potenzmenge

Satz 7

Sei M eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen. Dann ist die Kardinalität von $\mathrm{Pow}(M)$ *gleich* 2^n*. (auch geschrieben als* $|\mathrm{Pow}(M)| = 2^n$*)*

Beweis

Induktion über n.
(IA) $n = 1$. *Für* $M = \{a\}$ *gilt* $\mathrm{Pow}(M) = \{\phi, \{a\}\}$ *und damit*
$|\mathrm{Pow}(M)| = 2 = 2^1$
(IS) Zeige $|\mathrm{Pow}(M)| = 2^{n+1}$ *für Mengen mit* $|M| = n + 1$.
Die IV gilt für alle Mengen mit n Elementen.
Sei $M = \{x_0, x_1 \ldots, x_n\}$*, dann gilt*
$\mathrm{Pow}(M) = \mathrm{Pow}(M \setminus \{x_0\}) \cup \{U \cup \{x_0\} : U \in \mathrm{Pow}(M \setminus \{x_0\})\}$.
Nach IV gilt $|\mathrm{Pow}(M \setminus \{x_0\})| = 2^n$. *Damit erhalten wir*
$|\mathrm{Pow}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

q.e.d.

Kartesisches Produkt

Definition 8

Für $n \geq 2$ seien $M_1, \ldots, M_n$ nicht-leere Mengen. Dann ist das kartesische Produkt definiert als
$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$.
$(a_1 \ldots, a_n)$ wird als n-Tupel bezeichnet.
Für $M = M_1 = \ldots = M_n$ schreiben wir auch $M^n = M \times \ldots \times M$.

Weitere Vereinbarung:

1. $M^1 := \{(x) : x \in M\}$

Achtung:
$A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$, da $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$, aber nicht in $A \times B \times C$.

Kartesisches Produkt

Satz 9

Sei $n \geq 2$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ endliche nicht-leere Mengen. Dann gilt für die Kardinalität $|M_1 \times \ldots \times M_n| = \prod_{1 \leq i \leq n} |M_i|$.
Für M^n gilt $|M^n| = |M|^n$.

Beweis durch Induktion über n.

Beispiel: Sei $M = \{0, 1\}$; wie viele n-Tupel über M gibt es?
Also wie groß ist $|\{0, 1\}^n|$?

Es gilt $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n$ und damit $|\{0, 1\}^n| = 2^n$

Endliche Folgen

Definition 10

Sei A eine Menge, dann ist definiert
$A^0 := \{\varepsilon\}$, ε ist die leere Folge,
die leere Folge wird manchmal auch mit () bezeichnet.
$A^1 := \{(a) : a \in A\}$, die Menge der einelementigen Folgen
$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$, die n-elementigen Folgen (n-elementige Tupel) für $n \geq 1$
$A^+ := \{x : x \in A^i \text{ für } i \geq 1\}$ (ohne die leere Folge)
$A^* := A^+ \cup A^0$ alle endlichen Folgen inklusive der leeren Folge.

Beispiel: Buchstaben $:= \{a, b, c, \ldots, z\}$, Dann besteht Buchstaben$^+$ aus allen nicht-leeren Folgen (Tupeln); z.B. $(s, e, m, e, s, t, e, r) \in$ Buchstaben$^+$.

Relationen

Definition 11

Sei $n \geq 1$ und seien $M_1, \ldots, M_n$ Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq M_1 \times \ldots \times M_n$ wird auch Relation genannt.

Beobachtungen:

1. Sprechweise: Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in R$, R gilt für das Tupel $(x_1, \ldots, x_r)$.
2. Schreibweisen: $(x_1, \ldots, x_n) \in R$ oder $R(x_1, \ldots, x_r)$
3. Zweistellige Relationen: $(a, b) \in R$ oder aRb oder $R(a, b)$

Beispiele:

a) Gültig $\subseteq$ Daten, Daten $=$ Tage $\times$ Monate $\times$ Jahre
(1, Mai , 2013) $\in$ Gültig, Gültig(31, Februar, 2000) gilt nicht.
b) $7 \leq 9$, $4 = 4$ mit „$\leq$“, „$=$“ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
c) Student $\subseteq$ Name $\times$ Fach $\times$ Stadt
Student(Müller, Informatik, Paderborn), Student(Meier, Physik, München)

Eigenschaften zweistelliger Relationen $R \subseteq M \times M$

1. **reflexiv**: für alle $x \in M$: xRx
2. **irreflexiv**: es gibt kein $x \in M$ mit xRx
3. **symmetrisch**: für alle $x, y \in M$: xRy genau, dann wenn yRx.
4. **transitiv**: für alle $x, y, z \in M$: wenn xRy, yRz, dann xRz
5. **asymmetrisch**: für alle $x, y \in M$: xRy gilt nicht, falls yRx gilt.
6. **alternativ**: für alle $x \neq y \in M$: entweder xRy oder yRx.
7. **antisymmetrisch**: für alle $x, y \in M$: wenn xRy und yRx, dann $x = y$.

Eigenschaften zweistelliger Relationen $R \subseteq M \times M$

Definition 12

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ wird Äquivalenzrelation genannt genau dann, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele:

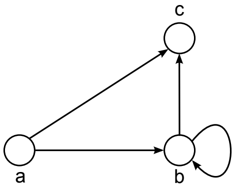
1. „$=$“ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die Gleichheit für $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. „$\leq$“ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist **keine** Äquivalenzrelation
3. $R \subseteq \{a, b, c, t\}^2$ mit $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (c, c), (b, a), (t, t)\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 13 (Gerichteter Graph)

Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer endlichen Menge von Knoten V (engl. Vertices) und einer endlichen Menge von Kanten $E \subseteq V \times V$ (engl. Edges).
Eine Kante (x, x) heißt Schleife.

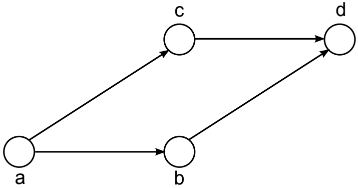
Beispiel: $G = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, b)\})$

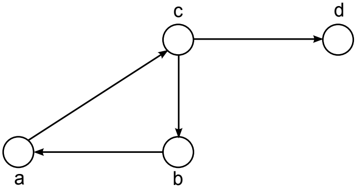


Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 14

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Eine Folge von Knoten $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ mit $n \geq 1$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $0 \leq i \leq n-1$ heißt **Weg** von v_0 nach v_n.
Ein Graph heißt **zyklenfrei**, wenn es für keinen Knoten x einen Weg von x nach x gibt.



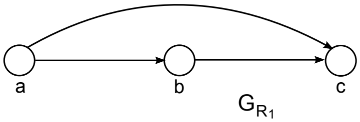


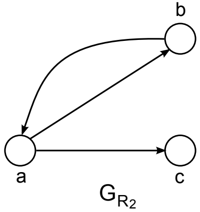
Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 15

Sei $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation über der endlichen Menge M. Sei $G_R := (V, E)$ mit $V := M$ und $E := R$, dann **repräsentiert** G_R die Relation R.

Sei $R_1, R_2 \subseteq \{a, b, c\}^2$ mit $R_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ und $R_2 := \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$.
Dann ist G_{R_1} zyklenfrei, aber G_{R_2} enthält den Zyklus (a, b, a).





Eigenschaften zweistelliger Relationen in Graphen

Sei $R \subseteq M^2$ eine zweistellige Relation:

1. R reflexiv: zu jedem $x \in M$ gibt es eine Kante $(x, x) \in E$
2. R transitiv: zu den Kanten (x, y) und (y, z) gibt es auch eine Kante (x, z).
3. R irreflexiv: es gibt keine Kante (x, x) in E.
4. R alternativ: für verschiedene Knoten x und y gibt es entweder eine Kante (x, y) oder eine Kante (y, x).
5. R symmetrisch: zu jeder Kante $(x, y) \in E$ gibt es auch die Kante (y, x) in E.

Ordungsrelationen

Definition 16

Sei $R \subseteq M^2$ eine zweistellige transitive Relation

1. **partielle Ordnung** (**Halbordnung**): R ist reflexiv und antisymmetrisch
2. **strenge Ordnung** (**strenge Halbordnung**): R ist irreflexiv
3. **Quasiordnung**: R ist reflexiv
4. **totale** oder **lineare** Ordnung: R ist alternativ, reflexiv und antisymmetrisch

Beobachtung:

1. Die „$\leq$“-Relation über natürlichen Zahlen ist eine totale Ordnung.
2. Die Gleichheit „$=$“ über natürlichen Zahlen ist keine totale Ordnung.

Funktionen

Definition 17

Eine Funktion f ist eine zweistellige Relation $f \subseteq D \times B$ für die gilt: Wenn $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$, dann $y = z$.
D ist der Definitionsbereich von f und B ist der Bildbereich von f.
Mit $D \to B$ bezeichnen wir die Menge aller Funktion von D nach B.
Wir sagen auch: f hat die **Signatur** $D \to B$ oder $f : D \to B$.

Notation:

1. Schreibweisen: $f(x) = y$, $(x, y) \in f$, xfy
2. $G_f := \{(x, y) : f(x) = y\}$ wird auch als Graph von f bezeichnet.
3. $f : D \to B$ heißt
   n-stellig, falls $D = M_1 \times \ldots \times M_n$ mit $n > 1$.
   1-stellig, falls D kein kartesisches Produkt und nicht leer ist.
4. Sonderfall: 0-stellig, $f() = b$. Wir sagen auch, dass f die Konstante b ist.

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion f heißt

1. **total**: für alle $x \in D$ gibt es ein y mit $f(x) = y$ (f vollständig definiert).
2. **partiell**: es wird nicht verlangt, dass f für alle $x \in D$ definiert ist.
3. **surjektiv**: für alle $y \in B$ gibt es ein $x \in D$ mit $f(x) = y$.
4. **injektiv**: für alle $y \in B$ gibt es höchstens ein x mit $f(x) = y$.
5. **bijektiv**: f ist injektiv und surjektiv.

Satz 18

Für endliche D und B gibt es $(|B|)^{|D|}$ totale Funktionen $f : D \to B$.
Die Anzahl der partiellen Funktionen $f : D \to B$ ist $(|B| + 1)^{|D|}$.

Beweis durch Induktion
Schreibweise: $|D \to B|$ ist die Kardinalität, also die Anzahl der totalen Funktionen von D nach B.

Spezielle Funktionen

1. Identitätsfunktion: $id_M : M \to M$ mit $id_M(x) = x$

2. Charakteristische Funktion einer Menge $M \subseteq U$:
   kennzeichnet die Elemente aus U, die in M enthalten sind.
   $\chi_M : U \to \{0, 1\}$ mit $\chi_M(x) = 1$, falls $x \in M$ und 0 sonst.

3. Boolesche Funktionen: $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$
   Idee: 0 steht für falsch, 1 steht für wahr.

Anzahl Boolescher Funktionen

Satz 19

Es gibt $2^{(2^n)}$ *totale Boolesche Funktionen* $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Beweis

Induktion über $n \geq 1$.
(IA) $n = 1$, *also* $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$. *Es gibt* $4 = 2^2$ *Möglichkeiten.*
(IS) $(n \to n+1)$;
Nach IV gibt es $2^{(2^n)}$ *verschiedene Funktionen* $g : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
$g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n, 0)$ *und* $h(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n, 1)$.
Dann gibt es nach der IV jeweils $2^{(2^n)}$ *viele Funktionen* g *und* h.
f *besteht aus der Kombination von* g *und* h.
Also insgesamt gibt es $2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} = 2^{(2^{n+1})}$ *viele totale Boolesche Funktionen* $f : \{0,1\}^{n+1} \to \{0,1\}$. *q.e.d.*