

Aufgabe 1 (Mengen & Relationen)

Teilaufgabe 1.1 (extensionale Darstellung - 3 Punkte)

Geben Sie jeweils die extensionale Darstellung der folgenden Mengen U , V und W an, sowie ihre Kardinalität. Dabei sei $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$.

1. $U := \text{Pow}(\text{Pow}(\emptyset)) \cup \{\emptyset\}$

$U =$ _____ $|U| =$

2. $V := B \times (A \setminus B)$

$V =$ _____ $|V| =$

3. $W := (B \setminus \{2\}) \times (B \setminus \{3\}) \times ((A \cap B) \setminus (A \setminus \{2\}))$

$W =$ _____ $|W| =$

Teilaufgabe 1.2 (Relationen - 7 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv oder alternativ sind. Treffen Sie eine Aussage zu **jeder** Eigenschaft. Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x \geq y\}$

2. $R_2 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$

Teilaufgabe 1.3 (Funktionen - 6 Punkte)

1. Seien $M := \{a, b, c\}$ und $N := \{1, 2, a\}$. Kann es bijektive Funktionen $M \rightarrow N$ geben? Falls ja, geben Sie die Anzahl k aller möglichen bijektiven Funktionen von M nach N sowie ein Beispiel für eine solche Funktion $g : M \rightarrow N$ an. Falls nein, begründen Sie, warum es keine solche Funktion geben kann.

2. Zeigen oder widerlegen Sie für endliche Mengen D, B :
Wenn eine Funktion $f : D \rightarrow B$ partiell und surjektiv ist, dann gilt $|D| \leq |B|$.

Aufgabe 2 (Aussagenlogik)

Teilaufgabe 2.1 (Wahrheitstafel - 8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit Atomen A, B, C :

$$\alpha = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \rightarrow A$$

$$\beta = B \vee C$$

1. Vervollständigen Sie die gegebene Wahrheitstafel und ergänzen Sie alle nötigen Spalten.

A	B	C	β $B \vee C$	α $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \rightarrow A$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

2. Welche der Eigenschaften *tautologisch*, *erfüllbar*, *falsifizierbar*, *widerspruchsvoll* gelten für α , welche nicht? Begründen Sie die Antwort.

3. Sind α und β logisch äquivalent? Begründen Sie die Antwort.

4. Prüfen Sie, ob β aus α semantisch folgt. Begründen Sie die Antwort anhand der Wahrheitstafel.

Teilaufgabe 2.2 (PS-Graph - 5 Punkte)

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel mit Atomen A, B, C, D, E, F, G :

$$\alpha = (A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge (E \vee F)) \vee G$$

1. Transformieren Sie α mit einem PS-Graphen in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel γ in KNF. Geben Sie jeden Zwischenschritt an.

2. Warum ist γ nicht logisch äquivalent, sondern nur erfüllbarkeitsäquivalent zu α ? Begründen Sie die Antwort.

Teilaufgabe 2.3 (Resolution - 8 Punkte)

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel mit Atomen A, B, C, D :

$$\alpha = (A \rightarrow (B \vee C)) \wedge (C \rightarrow \neg A) \wedge (B \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow \neg B) \wedge A$$

1. Prüfen Sie, ob es eine Unit-Resolutionswiderlegung für diese Formel gibt. Transformieren Sie α dazu zunächst in KNF, eliminieren Sie ggf. Mehrfachvorkommen und zeichnen Sie einen Resolutionsbaum.

2. Welche Aussage können Sie aufgrund Ihres Ergebnisses aus Teil 1 über die Erfüllbarkeit von α machen?

Teilaufgabe 2.4 (Formalisieren - 5 Punkte)

Formalisieren Sie die unten stehenden Aussagen aussagenlogisch. Nutzen Sie diese Abkürzungen:

- Es gibt Fisch (F).
- Es ist Montag (M).
- Otto hat Hunger (H).
- Es gibt Pizza (P).

1. Wenn es Pizza gibt, dann ist Montag

2. Wenn Otto Hunger hat, dann gibt es Fisch oder es gibt Pizza.

3. Wenn es Fisch gibt oder es Montag ist, dann hat Otto keinen Hunger.

4. Wenn es Fisch gibt, dann ist es entweder Montag oder Otto hat Hunger.

5. Es gibt Fisch und es ist Montag genau dann, wenn Otto Hunger hat oder es Pizza gibt.

Teilaufgabe 2.5 (Beweis - 6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Verallgemeinerung von de Morgan's Gesetz für Atome a_1, \dots, a_n :

$$\neg(a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n) \approx \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \dots \vee \neg a_n$$

Aufgabe 3 (Unifikation - 6 Punkte)

1. Im Folgenden seien w, x, y, z Variablen und b eine Konstante. Gegeben seien zwei Terme der Prädikatenlogik erster Stufe:

$$s = K(x, h(g(y)), f(x, w, g(z)), b)$$

$$t = K(g(y), h(z), f(z, g(x), g(g(b))), z)$$

Überprüfen Sie mit dem Verfahren von Robinson, ob die beiden Terme unifizierbar sind. Benutzen Sie dazu die angegebene Tabelle (die Anzahl der Zeilen macht keine Aussage über die benötigte Anzahl an Schritten) und **kennzeichnen** Sie in jedem Schritt das Abweichungspaar. Wenn die Terme unifizierbar sind, geben Sie den allgemeinsten Unifikator als Verkettung der Einzelsubstitutionen an und fassen Sie dann die Einzelsubstitutionen zu einer Substitution zusammen. Wenn die Terme nicht unifizierbar sind, kennzeichnen Sie die Stelle, an der die Terme nicht unifizierbar sind.

Schritt	Terme	$\sigma_0 = []$
1	$s\sigma_0 = K(x, h(g(y)), f(x, w, g(z)), b)$ $t\sigma_0 = K(g(y), h(z), f(z, g(x), g(g(b))), z)$	$\sigma_1 = \sigma_0[\quad]$
2	$s\sigma_1 =$ $t\sigma_1 =$	$\sigma_2 = \sigma_1[\quad]$
3	$s\sigma_2 =$ $t\sigma_2 =$	$\sigma_3 = \sigma_2[\quad]$
4	$s\sigma_3 =$ $t\sigma_3 =$	$\sigma_4 = \sigma_3[\quad]$
5	$s\sigma_4 =$ $t\sigma_4 =$	$\sigma_5 = \sigma_4[\quad]$
6	$s\sigma_5 =$ $t\sigma_5 =$	$\sigma_6 = \sigma_5[\quad]$
7	$s\sigma_6 =$ $t\sigma_6 =$	$\sigma_7 = \sigma_6[\quad]$
8	$s\sigma_7 =$ $t\sigma_7 =$	$\sigma_8 = \sigma_7[\quad]$

Unifikator $\sigma = []$ _____
 = _____

Aufgabe 4 (Prädikatenlogik)

Teilaufgabe 4.1 (Modellierung - 8 Punkte)

Wir betrachten die Situation in einem Hotel. Folgende Prädikate stehen zur Verfügung:

- $F(x)$ bedeutet, dass x ein Fußballer ist
- $T(x)$ bedeutet, dass x ein Trainer ist
- $V(x)$ bedeutet, dass x ein Verein ist
- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Schiedsrichter ist
- $G(x, y)$ bedeutet, dass x zu y gehört
- $K(x, y)$ bedeutet, dass x y kennt

Modellieren Sie die folgenden Zusammenhänge mit den gegebenen Prädikaten:

1. Ein Fußballer kennt nicht alle Schiedsrichter.

2. Jeder Trainer kennt alle anderen Trainer, die nicht Schiedsrichter sind.

3. Jeder Fußballer kennt irgendeinen Schiedsrichter.

4. Zu jedem Verein gehören genau ein Fußballer und genau ein Trainer.

Teilaufgabe 4.2 (Erfüllbarkeit - 4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \approx (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$$

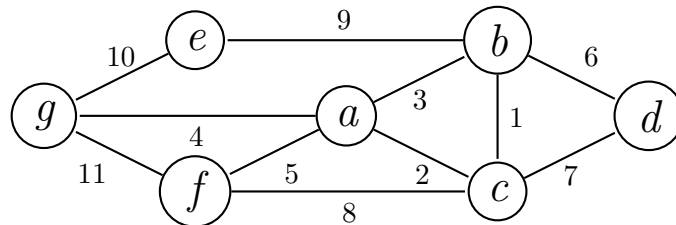
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Interpretation.



Aufgabe 5 (Graphen)

Teilaufgabe 5.1 (ungerichtete Graphen - 8 Punkte)

Gegeben sei der folgende ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \rightarrow \mathbb{N}$:



1. Geben Sie den Graphen G als Knoten- und Kantenmenge an. (2 Punkte)

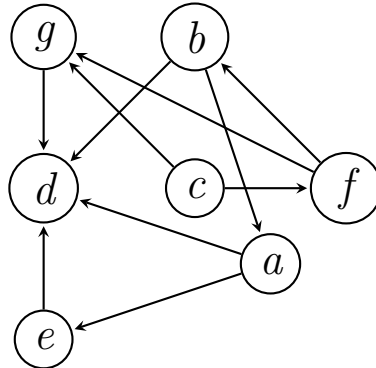
2. Existiert ein Eulerweg in G ? Falls ja, so geben Sie diesen an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

3. Das Gewicht eines Kreises ist definiert als die Summe der Kantenmarkierungen der Kanten im Kreis.

Existiert ein Hamiltonkreis in G ? Falls ja, so geben Sie einen Hamiltonkreis mit minimalem Gewicht an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. (4 Punkte)

Teilaufgabe 5.2 (gerichtete Graphen - 6 Punkte)

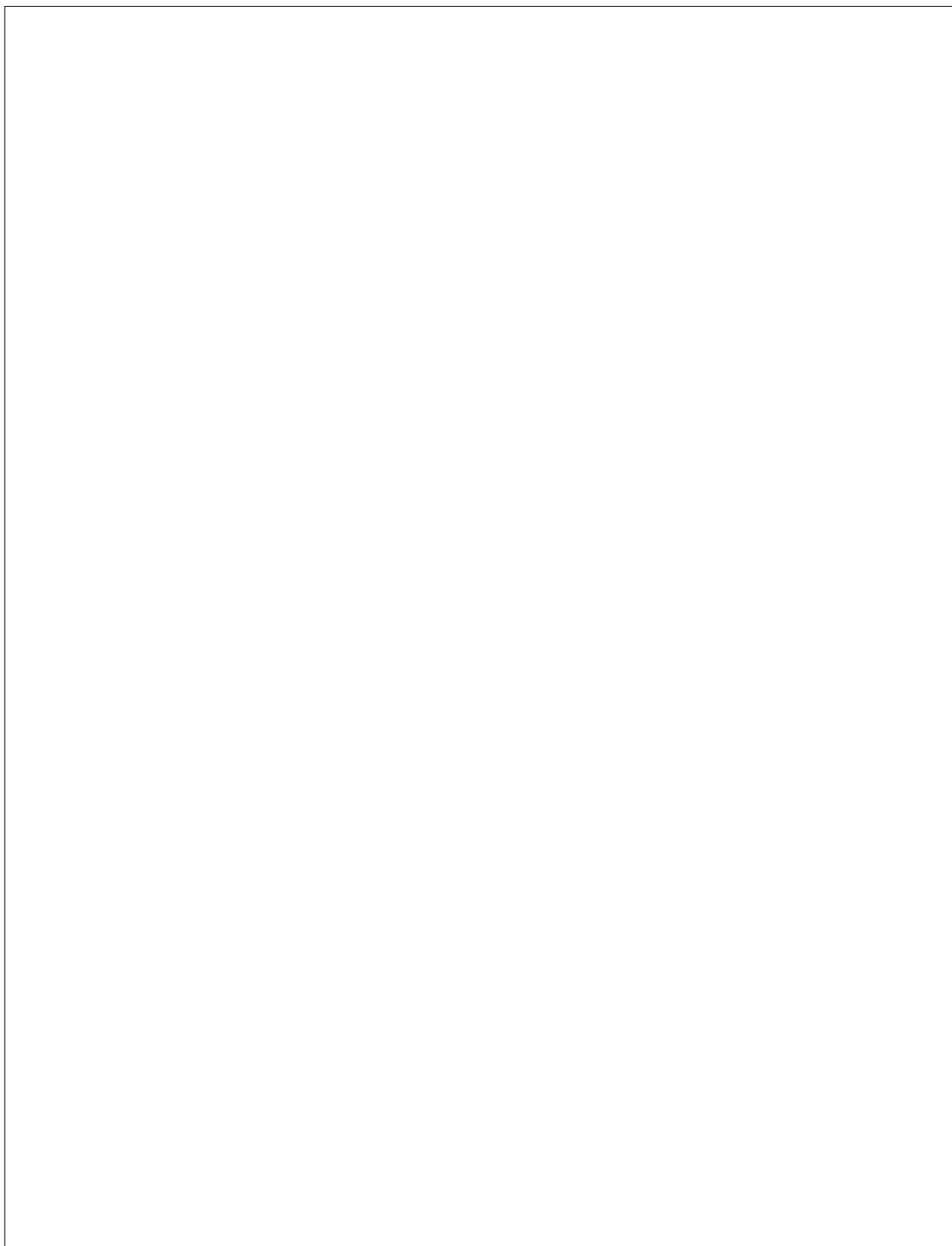
Gegeben sei der folgende Graph $D = (V, E)$:



1. Geben Sie für jeden Knoten von D den Eingangs- und Ausgangsgrad an. (2 Punkte)

2. Besitzt D eine topologische Sortierung? Falls ja, so geben Sie eine solche an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

3. Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $V' = \{a, b, c, d, e\}$ induzierten Teilgraphen von D . (2 Punkte)



Aufgabe 6 (Beweisen, Modellieren)

Teilaufgabe 6.1 (Beweisen - 12 Punkte)

1. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph und sei $T = (V, E_T)$ ein Spannbaum von G . Zu jeder Kante $e \in E \setminus E_T$ gibt es eine Kante $e' \in E_T$, sodass $T' = (V, (E_T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ ein Spannbaum von G ist. (8 Punkte)

2. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantenmarkierung $m : E \rightarrow \mathbb{N}$.

Wir definieren das *Gewicht eines Knotens* $v \in V$ als die Summe der Kantenmarkierungen aller Kanten, die zu v inzident sind.

Beweisen Sie die folgende Aussage: Die Summe der Gewichte aller Knoten in G ist gerade. (4 Punkte)

Teilaufgabe 6.2 (Modellieren - 12 Punkte)

Homer J.S. möchte seine Abschlussarbeit in Nuklearphysik schreiben. Sein Betreuer erklärt ihm, wie das Schreiben einer Abschlussarbeit ungefähr abläuft. Es besteht im Groben aus den folgenden Aufgaben:

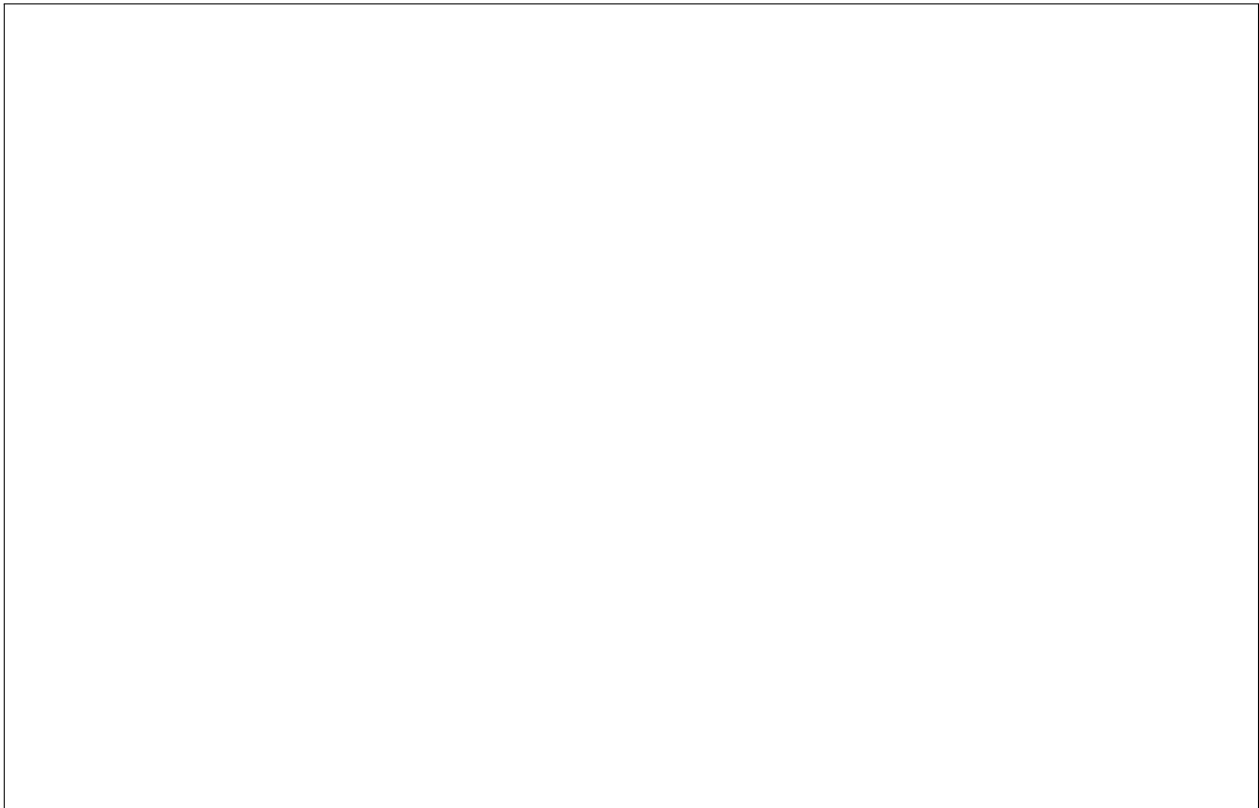
- Ein Einarbeitung in das Thema
- Erg Ergebnisse aufschreiben
- Exp Experimente ausführen
- Fin Finale Version erstellen (Korrekturlesen etc.)
- Grund Grundlagen-Kapitel aufschreiben
- Lit Literatursuche
- Theo Arbeit an der Theorie
- Tr Erstes Treffen mit dem Betreuer

Die Abhängigkeiten unter den einzelnen Aufgaben sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Dabei ist die Aufgabe aus Zeile i von der Aufgabe aus Spalte j abhängig genau dann, wenn die Tabelle ein „x“ in Zeile i und Spalte j enthält. So ist zum Beispiel das Aufschreiben der Ergebnisse vom Ausführen der Experimente abhängig.

	Ein	Erg	Exp	Fin	Grund	Lit	Theo	Tr
Ein	-	-	-	-	-	x	-	-
Erg	-	-	x	-	-	-	-	-
Exp	x	-	-	-	-	-	-	-
Fin	-	x	-	-	x	-	x	-
Grund	x	-	-	-	-	-	-	-
Lit	-	-	-	-	-	-	-	x
Theo	x	-	-	-	-	-	-	-
Tr	-	-	-	-	-	-	-	-

1. Modellieren Sie den Sachverhalt der Tabelle als gerichteten Graphen $D = (V, A)$. Geben Sie dazu zunächst an, wie die Mengen V und A definiert sind. Erklären Sie, wann eine Kante (u, v) in A enthalten ist. (2 Punkte)

2. Zeichnen Sie den Graphen D . (2 Punkte)



3. Homer versucht einen Arbeitsplan zu erstellen. Gesucht ist eine Reihenfolge r für die Abarbeitung der Aufgaben, die alle Abhängigkeiten berücksichtigt.

Stellen Sie r in folgender Tabelle als eine injektive Abbildung von der Menge der Aufgaben nach \mathbb{N} dar, so dass für jeweils zwei Aufgaben a_1 und a_2 gilt: Falls a_2 von a_1 abhängt, dann gilt $r(a_1) < r(a_2)$.

Leistung a_i	Ein	Erg	Exp	Fin	Grund	Lit	Theo	Tr
Reihenfolge $r(a_i)$								

Welches graphentheoretische Problem liegt dieser Frage zugrunde? (4 Punkte)



4. Für die Bearbeitung einer der Aufgaben (ausgenommen das erste Treffen) wird jeweils eine Woche benötigt. Homer ist gut im Multitasking und kann Aufgaben, die nicht voneinander abhängen, gleichzeitig bearbeiten. Wie lange dauert das Anfertigen der Arbeit mindestens? Nach welcher Eigenschaft des Graphen ist hier gefragt? (2 Punkte)

5. Nun kommt sein Betreuer auf die Idee, dass es für Homer besser wäre, seine Arbeit von L^AT_EX setzen zu lassen. Homer muss deshalb noch einen L^AT_EX Workshop besuchen. Dieser dauert 3 Wochen und muss logischerweise absolviert werden, bevor Homer damit anfängt, Teile der Arbeit aufzuschreiben. Allerdings berichtet der Betreuer ihm davon erst bei ihrem ersten Treffen.

Modifizieren Sie Ihren Graphen, um auch diesen Sachverhalt abzubilden, indem Sie einen modifizierten Graphen $D' = (V', E')$ angeben.

Gibt es jetzt noch eine Lösung für die Fragestellung aus Teilaufgabe 3? Falls ja, so geben Sie eine entsprechende Reihenfolge r' für D' an. Falls nein, so beweisen Sie dieses mittels Ihres Graphen D' . (2 Punkte)

Aufgabe 7 (Sprachen)

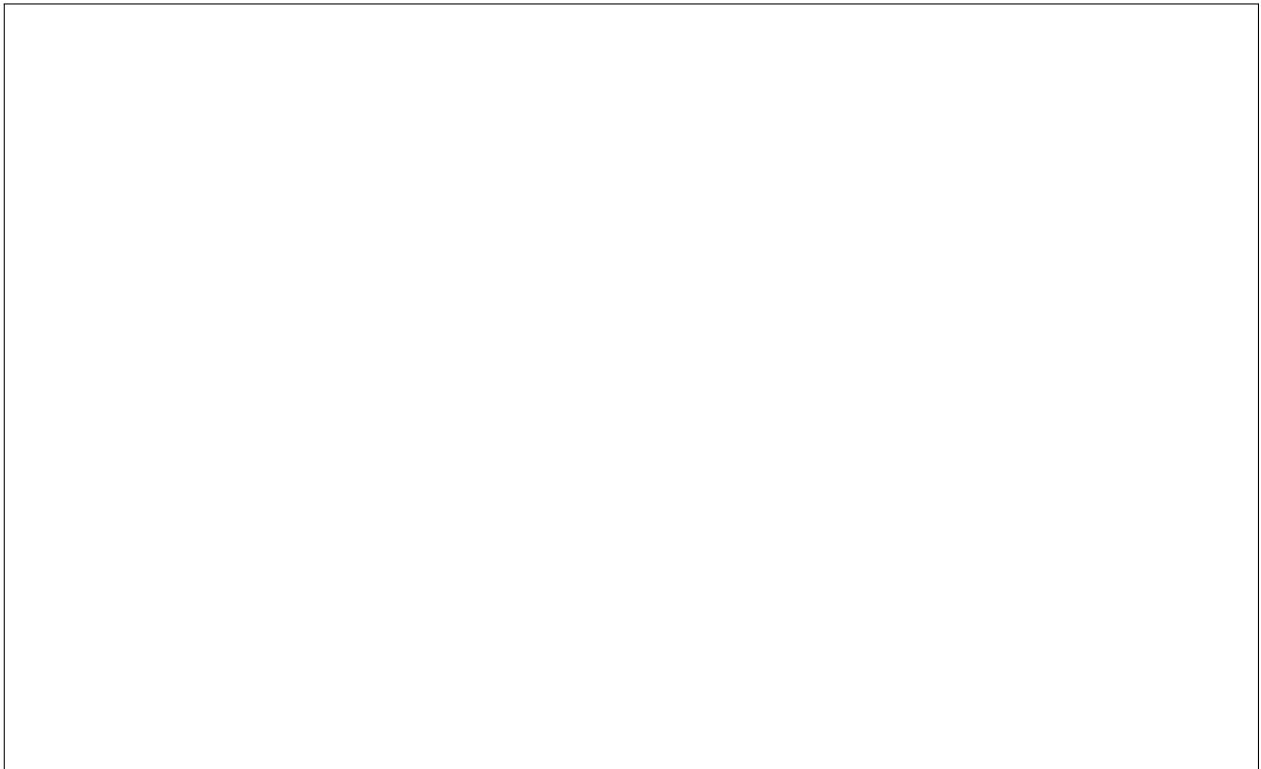
Teilaufgabe 7.1 (Grammatiken - 12 Punkte)

Gegeben sei die folgende Grammatik $G = (T, N, P, A)$ in Backus-Naur-Form mit $T = \{0, 1\}$, $N = \{A\}$ und

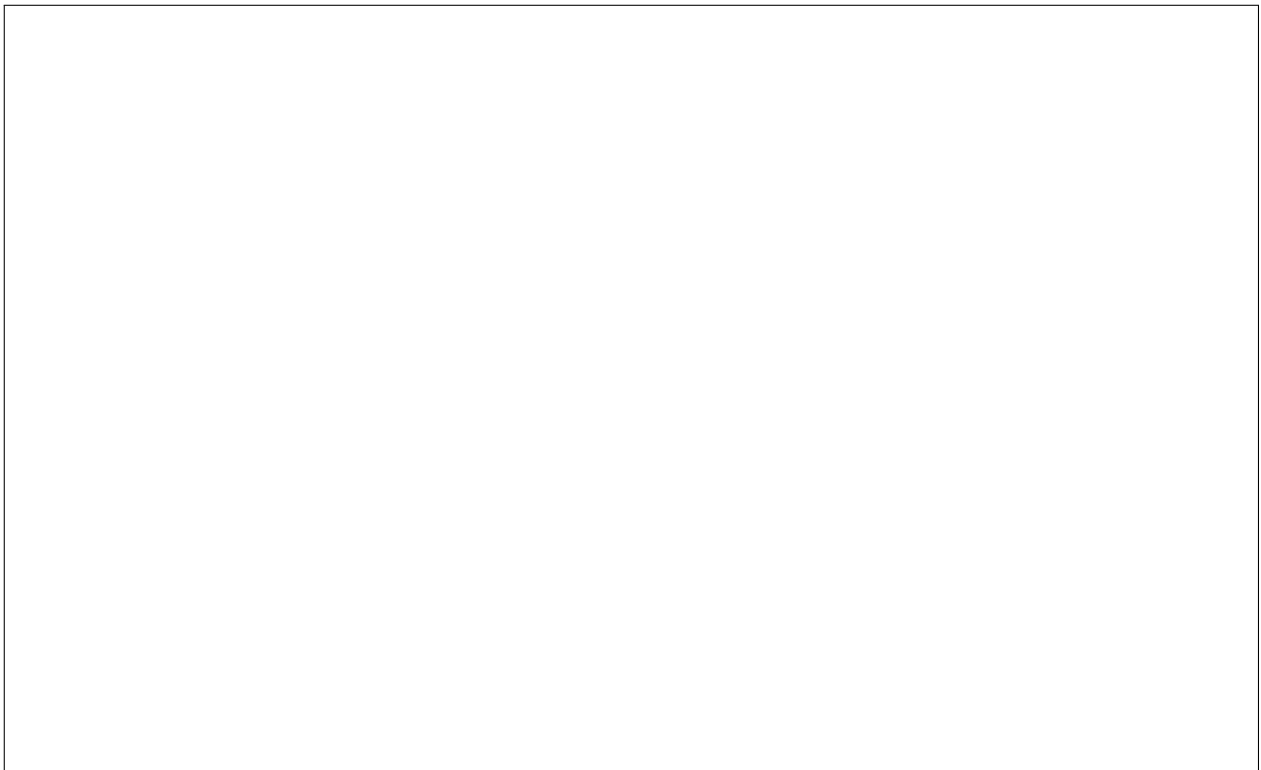
$$P = \{A ::= 00A1 \mid 1A00 \mid 0A01 \mid 10A0 \mid \epsilon\}.$$

1. Ist das Wort $w_1 = 0010011$ in $L(G)$ enthalten? Begründen Sie ihre Antwort. (4 Punkte)

2. Zeichnen Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $w_2 = 001001001 \in L(G)$. (4 Punkte)



3. Ist die Grammatik G eindeutig? Falls ja, dann argumentieren Sie warum. Falls nicht, dann geben Sie ein Wort $w_3 \in L(G)$ mit zwei verschiedenen Linksableitungen mit allen Ableitungsschritten für w_3 an. (4 Punkte)



Teilaufgabe 7.2 (Grammatiken - 8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

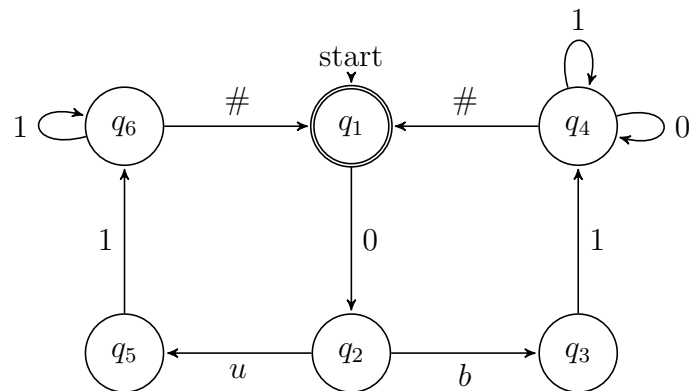
$$L_{abc} = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid \omega = a^n b^m c^{n-m} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ wobei } n \geq m\}.$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_{abc} als 4-Tupel $G_{abc} = (T, N, P, S)$ mit $L(G_{abc}) = L_{abc}$ an.

Lösungen mit mehr als 8 Ableitungsregeln werden mit 0 Punkten bewertet.

Teilaufgabe 7.3 (Definition von Sprachen - 8 Punkte)

Gegeben sei der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{u, b, 0, 1, \#\}$:



Geben Sie eine formale Definition der Sprache $L(A)$ an.

Entscheiden Sie sich dazu für *eine* der folgenden beiden Möglichkeiten:

- Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L(A)$ an.

Sie können hierbei die Maximalpunktzahl von 8 Punkten erreichen.

Lösungen, bei denen R aus mehr als 25 Zeichen besteht, werden mit 0 Punkten bewertet.

- Geben Sie eine formale Mengendefinition an.

Sie können hierbei maximal 4 Punkte erreichen.

Hinweis: Entscheiden Sie sich für eine der beiden Möglichkeiten! Auch bei dieser Aufgabe gibt es 0 Punkte, falls mehrere Lösungen angegeben sind.

Teilaufgabe 7.4 (Pumping-Lemma - 8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

$$L_{xy} = \{\omega \in \{x, y\}^* \mid \omega = x^n y^m \text{ mit } n, m \in \mathbb{N} \text{ wobei } n \leq m\}.$$

Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um zu beweisen, dass L_{xy} nicht regulär ist.

Aufgabe 8 (Automaten)

Teilaufgabe 8.1 (DFAs - 8 Punkte)

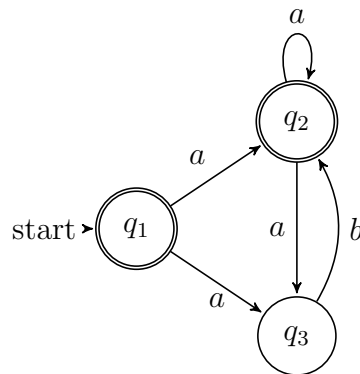
Gegeben Sei die Sprache

$$L_{ab} = \{\omega \in \{a, b\}^* \mid \omega \text{ enthält die Zeichenfolge } abab \text{ und die Zeichenfolge } bab\} .$$

Zeichnen Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) der L_{ab} akzeptiert.
Lösungen mit mehr als 8 Zuständen werden mit 0 Punkten bewertet.

Teilaufgabe 8.2 (NFAs - 6 Punkte)

Gegeben sei der folgende nichtdeterministische endliche Automat (NFA) N :

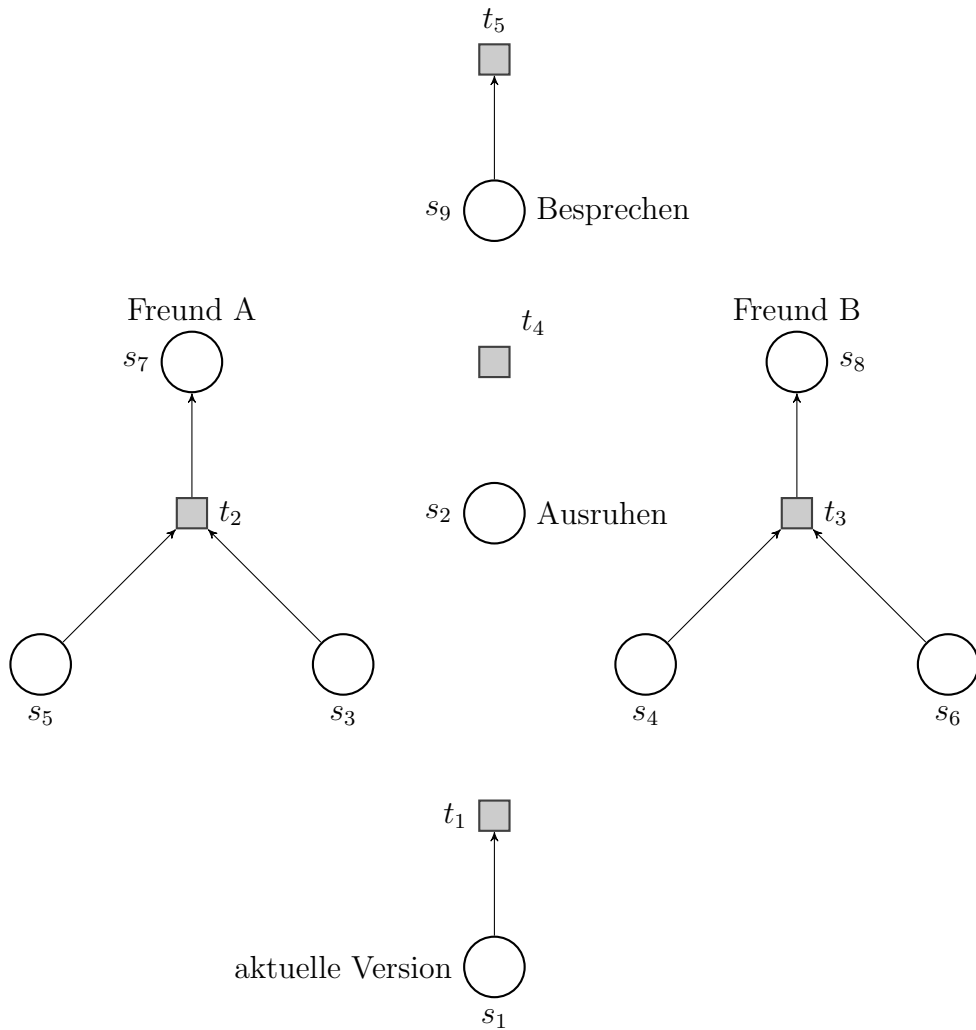


Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Potenzmengenkonstruktion, um N in einen deterministischen Automaten A mit $L(A) = L(N)$ umzuwandeln. Zeichnen Sie A nicht, sondern geben Sie die Übergangsfunktion δ_A des Automaten in tabellarischer Form an.

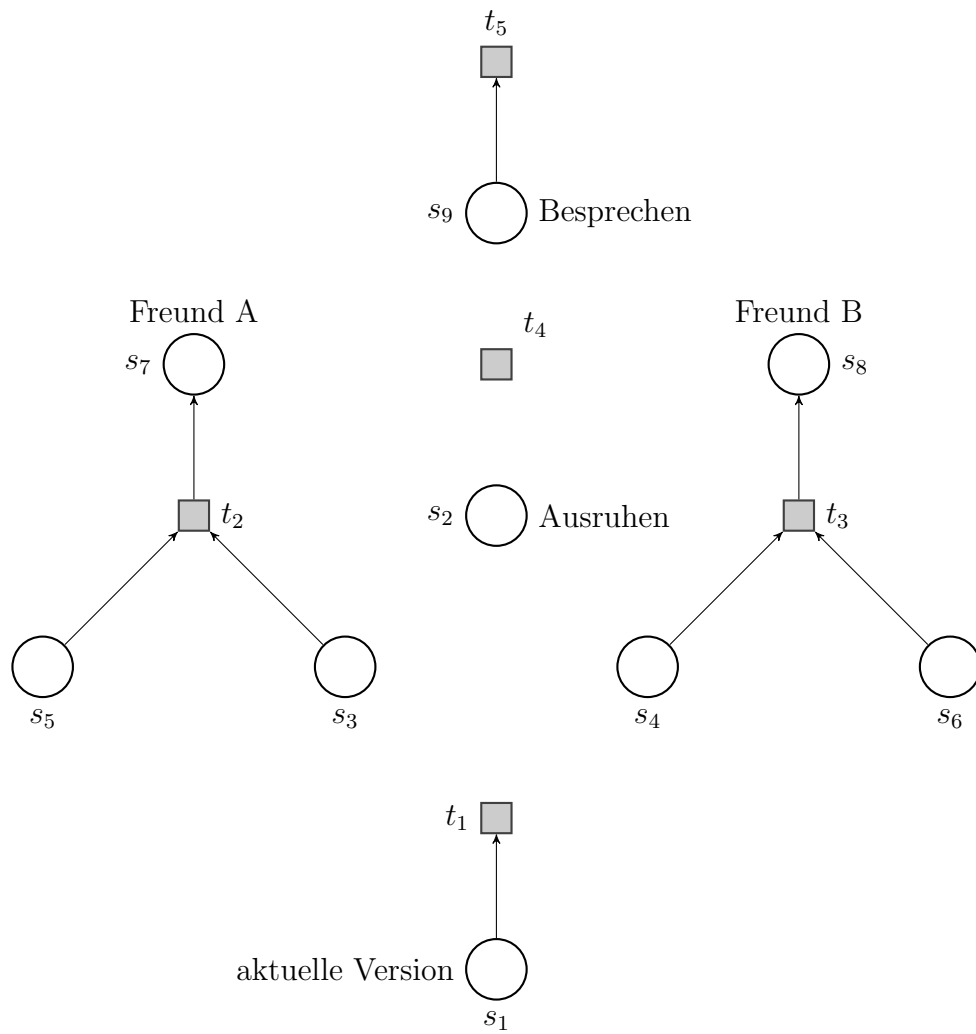
Aufgabe 9 (Petri-Netze - 6 Punkte)

Petra schreibt an ihrer Bachelorarbeit. Zwei Freunde helfen ihr bei der Korrektur. Immer wenn Petra eine Version fertig gestellt hat, gibt sie diese an die beiden weiter. Während ihre Freunde diese Version lesen, ruht Petra sich aus. Wenn beide Freunde fertig sind, treffen sich alle drei um die Anmerkungen zu besprechen. Anschließend erstellt Petra eine neue Version und gibt sie wieder an ihre Freunde weiter.

- Vervollständigen Sie das folgende Petri-Netz mit Stellen s_i und Transitionen t_i so, dass der beschriebene Sachverhalt abgebildet wird. Zeichnen Sie dazu geeignet Kanten und eine Anfangsmarkierung M_0 ein. Fügen Sie keine weiteren Transitionen und Stellen hinzu. (4 Punkte)



Ersatz-Vorlage:



2. Ist das von Ihnen vervollständigte Netz lebendig? Wenn ja, begründen Sie warum, wenn nein, dann geben Sie eine von Ihrer Startmarkierung M_0 aus erreichbare Markierung M und eine Transition t_i an, die der Lebendigkeit des Netzes widersprechen. (2 Punkte)