Prof. Dr. Kleine Büning und Prof. Dr. Blömer | Paderborn, den ??. Januar 2016

Probeklausur zur Vorlesung **Modellierung**

Für Studiengänge mit einem Modellierungsanteil von **8 ECTS**, wie zum Beispiel der Studiengang Computer Engineering

Wintersemester 2015/2016

- Aufkleber der Klausuraufsicht -

Beachten Sie folgende Hinweise

- Die Klausur besteht aus 22 einseitig bedruckten Seiten mit 8 Aufgaben. Insgesamt können Sie 128 Punkte erreichen. Die Klammerung darf nicht gelöst werden!
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein doppelseitig handbeschriebenes Blatt (A4).
- Schreiben Sie Lösungen möglichst in die vorgegebenen Kästen.
- Werden zu einer Aufgabe zwei Lösungen angegeben oder ist die Lösung nicht eindeutig, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst.
- Verwenden Sie zum Schreiben keine radierbaren Stifte, verwenden Sie keine Korrekturflüssigkeiten oder Korrekturroller und schreiben Sie nicht in roter oder grüner Farbe.
- Beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Viel Erfolg !

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
maximale Punkte	16	32	6	12	10	16	28	8	128
erreichte Punkte									

Aufgabe 1 (Mengen & Relationen)

Teilaufgabe 1.1 (extensionale Darstellung - 3 Punkte)

Geben Sie jeweils die extensionale Darstellung der folgenden Mengen U, V und W an, sowie ihre Kardinalität. Dabei sei $A := \{1, 2\}$ und $B := \{2, 3\}$.

1. $U := Pow(Pow(\emptyset)) \cup \{\emptyset\}$

   $U =$ ____ $|U| =$

2. $V := B \times (A \setminus B)$

   $V =$ ____ $|V| =$

3. $W := (B \setminus \{2\}) \times (B \setminus \{3\}) \times ((A \cap B) \setminus (A \setminus \{2\}))$

   $W =$ ____ $|W| =$

Teilaufgabe 1.2 (Relationen - 7 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Relationen jeweils an, ob sie reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, transitiv oder alternativ sind. Treffen Sie eine Aussage zu **jeder** Eigenschaft. Falls eine Eigenschaft nicht zutrifft, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

1. $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | x \geq y\}$
2. $R_2 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2 | y = \sqrt{x}\}$

Teilaufgabe 1.3 (Funktionen - 6 Punkte)

1. Seien $M := \{a, b, c\}$ und $N := \{1, 2, a\}$. Kann es bijektive Funktionen $M \to N$ geben? Falls ja, geben Sie die Anzahl k aller möglichen bijektiven Funktionen von M nach N sowie ein Beispiel für eine solche Funktion $g : M \to N$ an. Falls nein, begründen Sie, warum es keine solche Funktion geben kann.

2. Zeigen oder widerlegen Sie für endliche Mengen D, B:
   Wenn eine Funktion $f : D \to B$ partiell und surjektiv ist, dann gilt $|D| \leq |B|$.

Aufgabe 2 (Aussagenlogik)

Teilaufgabe 2.1 (Wahrheitstafel - 8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln mit Atomen A, B, C:

$$\alpha = (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \to A$$
$$\beta = B \vee C$$

1. Vervollständigen Sie die gegebene Wahrheitstafel und ergänzen Sie alle nötigen Spalten.

			β		α
A	B	C	$B \vee C$		$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \to A$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

2. Welche der Eigenschaften *tautologisch, erfüllbar, falsifizierbar, widerspruchsvoll* gelten für α, welche nicht? Begründen Sie die Antwort.

3. Sind α und β logisch äquivalent? Begründen Sie die Antwort.

4. Prüfen Sie, ob β aus α semantisch folgt. Begründen Sie die Antwort anhand der Wahrheitstafel.

Teilaufgabe 2.2 (PS-Graph - 5 Punkte)

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel mit Atomen A, B, C, D, E, F, G:

$$\alpha = (A \wedge B \wedge C) \vee (D \wedge (E \vee F)) \vee G$$

1. Transformieren Sie α mit einem PS-Graphen in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel γ in KNF. Geben Sie jeden Zwischenschritt an.

2. Warum ist γ nicht logisch äquivalent, sondern nur erfüllbarkeitsäquivalent zu α? Begründen Sie die Antwort.

Teilaufgabe 2.3 (Resolution - 8 Punkte)

Gegeben sei die folgende aussagenlogische Formel mit Atomen A, B, C, D:

$$\alpha = (A \to (B \vee C)) \wedge (C \to \neg A) \wedge (B \to D) \wedge (D \to \neg B) \wedge A$$

1. Prüfen Sie, ob es eine Unit-Resolutionswiderlegung für diese Formel gibt. Transformieren Sie α dazu zunächst in KNF, eliminieren Sie ggf. Mehrfachvorkommen und zeichnen Sie einen Resolutionsbaum.

2. Welche Aussage können Sie aufgrund Ihres Ergebnisses aus Teil 1 über die Erfüllbarkeit von α machen?

Teilaufgabe 2.4 (Formalisieren - 5 Punkte)

Formalisieren Sie die unten stehenden Aussagen aussagenlogisch. Nutzen Sie diese Abkürzungen:

- Es gibt Fisch (F).
- Es ist Montag (M).
- Otto hat Hunger (H).
- Es gibt Pizza (P).

1. Wenn es Pizza gibt, dann ist Montag

2. Wenn Otto Hunger hat, dann gibt es Fisch oder es gibt Pizza.

3. Wenn es Fisch gibt oder es Montag ist, dann hat Otto keinen Hunger.

4. Wenn es Fisch gibt, dann ist es entweder Montag oder Otto hat Hunger.

5. Es gibt Fisch und es ist Montag genau dann, wenn Otto Hunger hat oder es Pizza gibt.

Teilaufgabe 2.5 (Beweis - 6 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion die Verallgemeinerung von de Morgan's Gesetz für Atome $a_1, \ldots, a_n$:

$$\neg(a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n) \approx \neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \cdots \vee \neg a_n$$

Aufgabe 3 (Unifikation - 6 Punkte)

1. Im Folgenden seien w, x, y, z Variablen und b eine Konstante. Gegeben seien zwei Terme der Prädikatenlogik erster Stufe:

$$s = K(x, h(g(y)), f(x, w, g(z)), b)$$
$$t = K(g(y), h(z), f(z, g(x), g(g(b))), z)$$

Überprüfen Sie mit dem Verfahren von Robinson, ob die beiden Terme unifizierbar sind. Benutzen Sie dazu die angegebene Tabelle (die Anzahl der Zeilen macht keine Aussage über die benötigte Anzahl an Schritten) und **kennzeichnen** Sie in jedem Schritt das Abweichungspaar. Wenn die Terme unifizierbar sind, geben Sie den allgemeinsten Unifikator als Verkettung der Einzelsubstitutionen an und fassen Sie dann die Einzelsubstitutionen zu einer Substitution zusammen. Wenn die Terme nicht unifizierbar sind, kennzeichnen Sie die Stelle, an der die Terme nicht unifizierbar sind.

Schritt	Terme	$\sigma_0 = []$
1	$s\sigma_0 = K(x, h(g(y)), f(x, w, g(z)), b)$ $t\sigma_0 = K(g(y), h(z), f(z, g(x), g(g(b))), z)$	$\sigma_1 = \sigma_0[\qquad]$
2	$s\sigma_1 =$ $t\sigma_1 =$	$\sigma_2 = \sigma_1[\qquad]$
3	$s\sigma_2 =$ $t\sigma_2 =$	$\sigma_3 = \sigma_2[\qquad]$
4	$s\sigma_3 =$ $t\sigma_3 =$	$\sigma_4 = \sigma_3[\qquad]$
5	$s\sigma_4 =$ $t\sigma_4 =$	$\sigma_5 = \sigma_4[\qquad]$
6	$s\sigma_5 =$ $t\sigma_5 =$	$\sigma_6 = \sigma_5[\qquad]$
7	$s\sigma_6 =$ $t\sigma_6 =$	$\sigma_7 = \sigma_6[\qquad]$
8	$s\sigma_7 =$ $t\sigma_7 =$	$\sigma_8 = \sigma_7[\qquad]$

Unifikator $\sigma =$ $[\,]$ ________________________________

$=$ ________________________________

Aufgabe 4 (Prädikatenlogik)

Teilaufgabe 4.1 (Modellierung - 8 Punkte)

Wir betrachten die Situation in einem Hotel. Folgende Prädikate stehen zur Verfügung:

- $F(x)$ bedeutet, dass x ein Fußballer ist
- $T(x)$ bedeutet, dass x ein Trainer ist
- $V(x)$ bedeutet, dass x ein Verein ist
- $S(x)$ bedeutet, dass x ein Schiedsrichter ist
- $G(x, y)$ bedeutet, dass x zu y gehört
- $K(x, y)$ bedeutet, dass x y kennt

Modellieren Sie die folgenden Zusammenhänge mit den gegebenen Prädikaten:

1. Ein Fußballer kennt nicht alle Schiedsrichter.

2. Jeder Trainer kennt alle anderen Trainer, die nicht Schiedsrichter sind.

3. Jeder Fußballer kennt irgendeinen Schiedsrichter.

4. Zu jedem Verein gehören genau ein Fußballer und genau ein Trainer.

Teilaufgabe 4.2 (Erfüllbarkeit - 4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie:

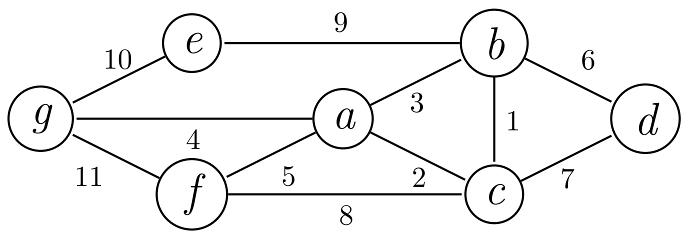
$$\exists x(P(x) \land Q(x)) \approx (\exists x P(x)) \land (\exists x Q(x))$$

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Interpretation.

Aufgabe 5 (Graphen)

Teilaufgabe 5.1 (ungerichtete Graphen - 4 Punkte)

Gegeben sei der folgende ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$:

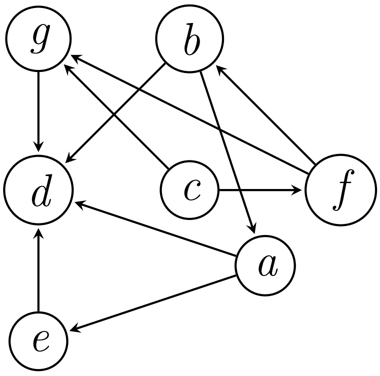


1. Geben Sie den Graphen G als Knoten- und Kantenmenge an. (2 Punkte)

2. Existiert ein Eulerweg in G? Falls ja, so geben Sie diesen an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Teilaufgabe 5.2 (gerichtete Graphen - 6 Punkte)

Gegeben sei der folgende Graph $D = (V, E)$:



1. Geben Sie für jeden Knoten von D den Eingangs- und Ausgangsgrad an. (2 Punkte)

2. Besitzt D eine topologische Sortierung? Falls ja, so geben Sie eine solche an. Falls nein, so begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

3. Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $V' = \{a, b, c, d, e\}$ induzierten Teilgraphen von D. (2 Punkte)

Aufgabe 6 (Beweisen, Modellieren)

Teilaufgabe 6.1 (Beweisen - 8 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph und sei $T = (V, E_T)$ ein Spannbaum von G. Zu jeder Kante $e \in E \setminus E_T$ gibt es eine Kante $e' \in E_T$, sodass $T' = (V, (E_T \setminus \{e'\}) \cup \{e\})$ ein Spannbaum von G ist. (8 Punkte)

Teilaufgabe 6.2 (Modellieren - 8 Punkte)

Homer J.S. möchte seine Abschlussarbeit in Nukularphysik schreiben. Sein Betreuer erklärt ihm, wie das Schreiben einer Abschlussarbeit ungefähr abläuft. Es besteht im Groben aus den folgenden Aufgaben:

Ein	Einarbeitung in das Thema
Erg	Ergebnisse aufschreiben
Exp	Experimente ausführen
Fin	Finale Version erstellen (Korrekturlesen etc.)
Grund	Grundlagen-Kapitel aufschreiben
Lit	Literatursuche
Theo	Arbeit an der Theorie
Tr	Erstes Treffen mit dem Betreuer

Die Abhängigkeiten unter den einzelnen Aufgaben sind in der folgenden Tabelle dargestellt. Dabei ist die Aufgabe aus Zeile i von der Aufgabe aus Spalte j abhängig genau dann, wenn die Tabelle ein „x" in Zeile i und Spalte j enthält. So ist zum Beispiel das Aufschreiben der Ergebnisse vom Ausführen der Experimente abhängig.

	Ein	Erg	Exp	Fin	Grund	Lit	Theo	Tr
Ein	-	-	-	-	-	x	-	-
Erg	-	-	x	-	-	-	-	-
Exp	x	-	-	-	-	-	-	-
Fin	-	x	-	-	x	-	x	-
Grund	x	-	-	-	-	-	-	-
Lit	-	-	-	-	-	-	-	x
Theo	x	-	-	-	-	-	-	-
Tr	-	-	-	-	-	-	-	-

1. Modellieren Sie den Sachverhalt der Tabelle als gerichteten Graphen $D = (V, A)$. Geben Sie dazu zunächst an, wie die Mengen V und A definiert sind. Erklären Sie, wann eine Kante (u, v) in A enthalten ist. (2 Punkte)

2. Zeichnen Sie den Graphen D. (2 Punkte)

3. Homer versucht einen Arbeitsplan zu erstellen. Gesucht ist eine Reihenfolge r für die Abarbeitung der Aufgaben, die alle Abhängigkeiten berücksichtigt.

   Stellen Sie r in folgender Tabelle als eine injektive Abbildung von der Menge der Aufgaben nach $\mathbb{N}$ dar, so dass für jeweils zwei Aufgaben a_1 und a_2 gilt: Falls a_2 von a_1 abhängt, dann gilt $r(a_1) < r(a_2)$.

Leistung a_i	Ein	Erg	Exp	Fin	Grund	Lit	Theo	Tr
Reihenfolge $r(a_i)$								

   Welches graphentheoretische Problem liegt dieser Frage zugrunde? (4 Punkte)

Aufgabe 7 (Sprachen)

Teilaufgabe 7.1 (Grammatiken - 12 Punkte)

Gegeben sei die folgende Grammatik $G = (T, N, P, A)$ in Backus-Naur-Form mit $T = \{0, 1\}$, $N = \{A\}$ und

$$P = \{A ::= 00A1 \mid 1A00 \mid 0A01 \mid 10A0 \mid \epsilon\}.$$

1. Ist das Wort $w_1 = 0010011$ in $L(G)$ enthalten? Begründen Sie ihre Antwort. (4 Punkte)

2. Zeichnen Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $w_2 = 001001001 \in L(G)$. (4 Punkte)

3. Ist die Grammatik G eindeutig? Falls ja, dann argumentieren Sie warum. Falls nicht, dann geben Sie ein Wort $w_3 \in L(G)$ mit zwei verschiedenen Linksableitungen mit allen Ableitungsschritten für w_3 an. (4 Punkte)

Teilaufgabe 7.2 (Grammatiken - 8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

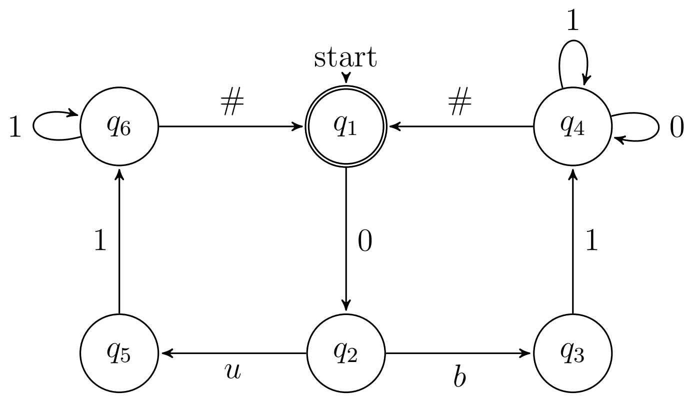
$$L_{abc} = \{\omega \in \{a, b, c\}^* \mid \omega = a^n b^m c^{n-m} \text{ mit } n, m \in \mathbb{N}_0 \text{ wobei } n \geq m\}.$$

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G_{abc} als 4-Tupel $G_{abc} = (T, N, P, S)$ mit $L(G_{abc}) = L_{abc}$ an.

Lösungen mit mehr als 8 Ableitungsregeln werden mit 0 Punkten bewertet.

Teilaufgabe 7.3 (Definition von Sprachen - 8 Punkte)

Gegeben sei der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{u, b, 0, 1, \#\}$:



Geben Sie eine formale Definition der Sprache $L(A)$ an.
Entscheiden Sie sich dazu für *eine* der folgenden beiden Möglichkeiten:

- Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $L(R) = L(A)$ an.

  Sie können hierbei die Maximalpunktzahl von 8 Punkten erreichen.

  Lösungen, bei denen R aus mehr als 25 Zeichen besteht, werden mit 0 Punkten bewertet.

- Geben Sie eine formale Mengendefinition an.

  Sie können hierbei maximal 4 Punkte erreichen.

Hinweis: Entscheiden Sie sich für eine der beiden Möglichkeiten! Auch bei dieser Aufgabe gibt es 0 Punkte, falls mehrere Lösungen angegeben sind.

Aufgabe 8 (Automaten)

Teilaufgabe 8.1 (DFAs - 8 Punkte)

Gegeben Sei die Sprache

$$L_{ab} = \{\omega \in \{a, b\}^* |\ \omega \text{ enthält die Zeichenfolge } abab \text{ und die Zeichenfolge } bab\}\ .$$

Zeichnen Sie einen deterministischen endlichen Automaten (DFA) der L_{ab} akzeptiert.
Lösungen mit mehr als 8 *Zuständen werden mit* 0 *Punkten bewertet.*