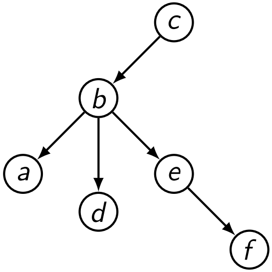
Wurzelbäume

Definition 1

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein gerichteter azyklischer Graph, in dem genau ein Knoten w Eingangsgrad 0 besitzt und alle anderen Knoten Eingangsgrad 1 besitzen. Knoten w heißt die Wurzel des Graphen.



Wurzelbaum mit Wurzel c

Wurzelbäume

Alternative Definition

Ein Wurzelbaum (oder auch gerichteter Baum) ist ein Paar (T, w), wobei $T = (V, E)$ ein ungerichteter Baum ist und $w \in V$ ein Knoten ist. Knoten w heißt die Wurzel des Graphen.

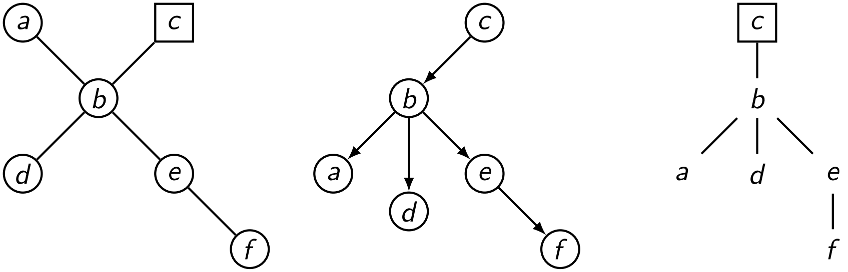
Von ungerichtet zu gerichtet

- In T gibt es für jeden Knoten $v \in V$ einen eindeutigen Pfad von w zu v.
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten $v \in V$ ein gerichteter Pfad von w zu v führt.

Wurzelbäume

Von ungerichtet zu gerichtet

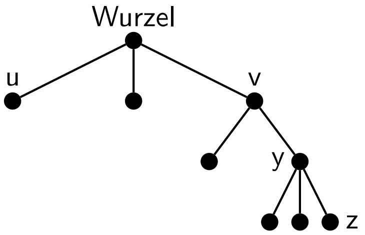
- In T gibt es für jeden Knoten $v \in V$ einen eindeutigen Pfad von w zu v.
- Orientieren Kanten so, dass für jeden Knoten $v \in V$ ein gerichteter Pfad von w zu v führt.



Grundlegende Begriffe

Sei (T, w), $T = (V, E)$, ein Wurzelbaum und $v \in V$.

- Die Knoten auf dem Pfad P von w zu v heißen **Vorgänger** von v.
- Der zu v benachbarte Knoten auf P heißt **unmittelbarer Vorgänger**, auch **Vater** oder **Elter**, von v.
- Knoten u, so dass v auf dem Pfad von w zu u liegt, heißen **Nachfolger** von v.
- Ein mit v durch eine Kante verbundener Nachfolger heißt **unmittelbarer Nachfolger**, auch **Sohn** oder **Kind** von v.

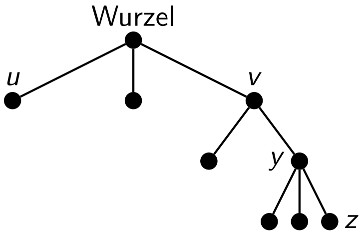


- v ist Vorgänger von z.
- v ist unmittelbarer Vorgänger von y.
- u ist Nachfolger der Wurzel.
- y ist unmittelbarer Nachfolger von v.

Höhe von Bäumen

Definition 2

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum und $v \in V$ ein Knoten. Die Höhe von v ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in T mit Anfangsknoten v. Die Höhe von T ist die Höhe der Wurzel von T.

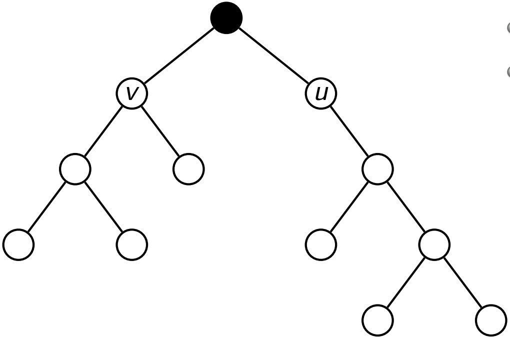


- v hat Höhe 2.
- u hat Höhe 0.
- Der Baum hat Höhe 3.

Höhe von Bäumen

Definition 2

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum und $v \in V$ ein Knoten. Die Höhe von v ist maximale Länge eines (gerichteten) Pfades in T mit Anfangsknoten v. Die Höhe von T ist die Höhe der Wurzel von T.



- v hat Höhe 2.
- u hat Höhe 3.
- Der Baum hat Höhe 4.

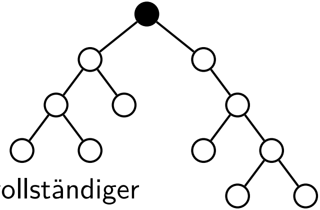
Binärbäume

Definition 3

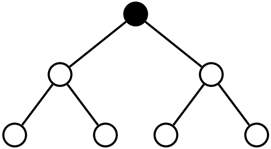
Ein Binärbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.
Ein vollständiger Binärbaum ist ein Binärbaum, in dem

1. jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau zwei unmittelbare Nachfolger hat
2. alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Einen Binärbaum, der nicht vollständig ist, nennen wir unvollständig.



unvollständiger Binärbaum



vollständiger Binärbaum der Höhe 2

Binärbäume

Satz 4

Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis

Induktion über h
Induktionsanfang $h = 0$

- Baum der Höhe 0 besitzt
- $1 = 2^1 - 1$ Knoten
- $1 = 2^0$ Blätter

Binärbäume

Satz 4

Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1}-1$ Knoten.

Beweis

Induktionsvoraussetzung Satz korrekt für Knoten der Höhe $\leq h$.
Induktionsschritt $h \to h+1$

- T vollständiger binärer Baum der Höhe $h+1$ und mit Wurzel w
- w Wurzel mit direkten Nachfolgern w_1 und w_2
- w_i und seine Nachfolger sind vollständiger Baum T_i der Höhe h, $i = 1, 2$
- T_i besitzt 2^h Blätter und $2^{h+1}-1$ Knoten, $i = 1, 2$
- Anzahl der Blätter von T ist Summe der Anzahl der Blätter von T_1 und T_2
- Anzahl der Blätter ist $2^h + 2^h = 2 \cdot 2^h = 2^{h+1}$

Binärbäume

Satz 4

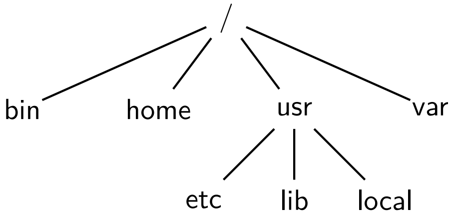
Ein vollständiger Binärbaum der Höhe h hat 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten.

Beweis

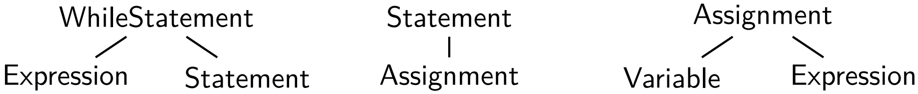
Induktionsschritt $h \to h+1$

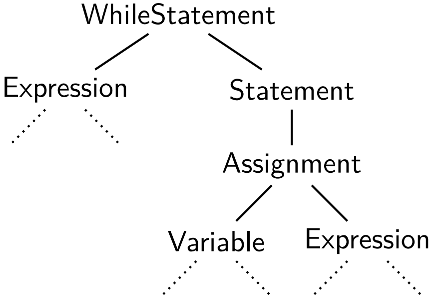
- T_i besitzt 2^h Blätter und $2^{h+1} - 1$ Knoten, $i = 1, 2$
- Anzahl der Knoten von T ist Summe der Anzahl der Knotenvon T_1 und T_2 plus 1 (für w),
- Anzahl der Knoten ist $2^{h+1} - 1 + 2^{h+1} - 1 + 1 = 2 \cdot 2^{h+1} - 1 = 2^{h+2} - 1$

Beschreibung von Strukturen - Dateisysteme



Beschreibung von Strukturen - Programmkonstrukte





Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

- Ein Handlungsreisender möchte auf einer Rundreise n Städte besuchen.
- Die Städte sind mit Straßen einer gewissen Länge verbunden. Manche Städte können von anderen Städten eventuell nicht direkt erreicht werden.
- Gesucht ist eine Tour minimaler Länge, die jede Stadt genau einmal besucht.

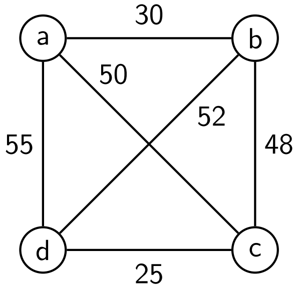
Modellierung durch Graphen:

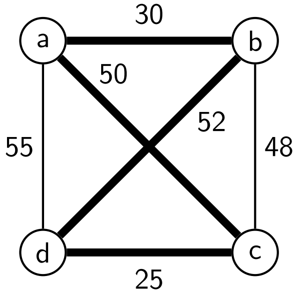
- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierungen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

Entscheidungsbäume - das Problem des Handlungsreisenden

Modellierung durch Graphen:

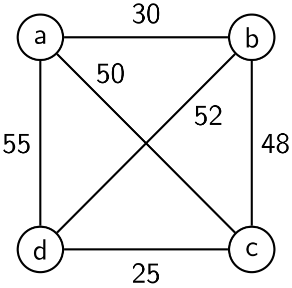
- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierunen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein Hamiltonkreis mit möglichst geringem Gewicht.
- Gewicht eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

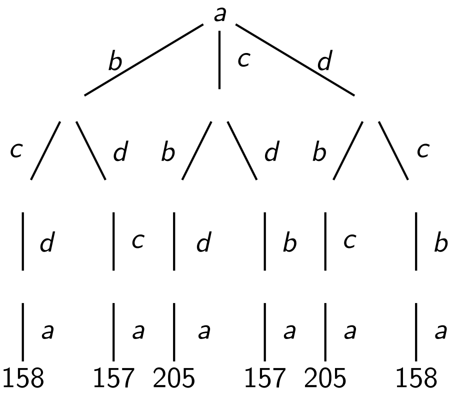




Kreis der Länge 157

Entscheidungsbäume

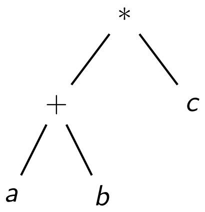




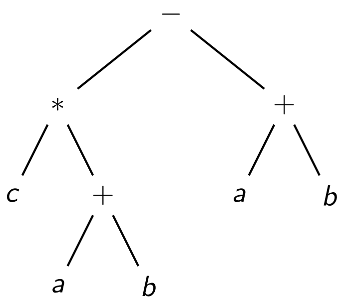
- Ein Entscheidungsbaum spannt alle potentielle Lösungen einer Aufgabe auf.
- Die Lösungen werden durch die Blätter charakterisiert.
- Der Pfad zu einem Blatt beschreibt die Entscheidungen, die zu diesem Blatt (Lösung) führen.

Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

- dienen zur Beschreibung der Struktur von arithmetischen Termen und Ausdrücken
- Knoten repräsentieren Variablen, Konstanten und Operatoren
- Kanten verbinden diese mit ihren Operanden



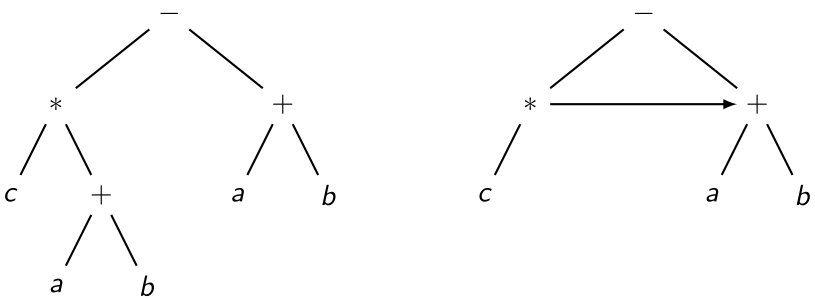
$(a + b) * c$



$(a + b) * c - (a + b)$

Termbäume - Kantorowitsch-Bäume

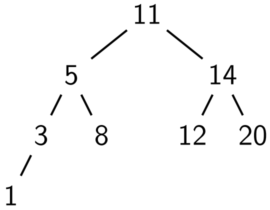
- Taucht ein Teilausdruck zweimal auf, können die entsprechenden Knoten identifiziert werden.

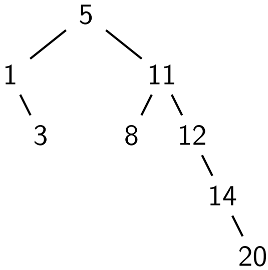


- Der Baum wird dadurch zu einem gerichteten, kreisfreien Graphen.
- Eingesetzt z.B. von Compilern, um Code zu erzeugen, der gleiche Teilausdrücke nur einmal auswertet.

Suchbäume

- Binäre Bäume $T = (V, E)$ mit $V \subset \mathbb{N}$
- unterscheiden zwischen rechten und linken Nachfolgern
- für alle Knoten v gilt
  1. alle rechten Nachfolger von v sind größer als v
  2. alle linken Nachfolger von v sind kleiner als v





- gut geeignet, um Anfrage „$x \in V$?“ zu beantworten
- sollten möglichst balanciert sein

Zusammenfassung Graphen

Problemklassen

- Wegeprobleme
- Verbindungsprobleme
- Zuordnungsprobleme
- Abhängigkeitsprobleme
- hierarchische Strukturen
- verzweigte Abläufe
- Anordnung in Folgen

Knoten- und Kantenbedeutung

- verbunden, benachbart, ...
- Entscheidung, Alternative, Verzweigung
- Vorbedingung, Abhängigkeit
- (Un-)Verträglichkeit
- besteht aus, enthält, ist-ein
- verzweigte Abläufe
- Relation

Knoten- und Kantenmarkierungen

- Entfernung, Kosten, Gewinn
- Färbung $\doteq$ disjunkte Knotenmengen
- Symbole einer Sprache