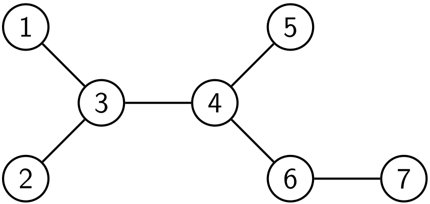
Bäume und Wälder

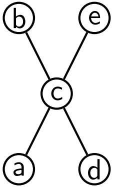
Definition 1

Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph. Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.
Ein Knoten v eines Baums mit Grad $\deg(v) = 1$ heißt Blatt.

Baum T_1



Baum T_2

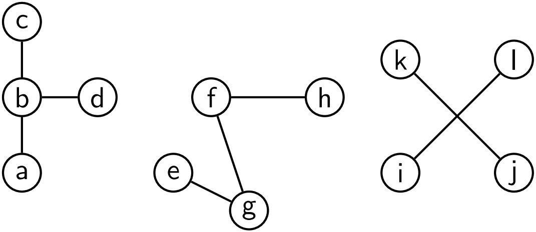


- Knoten $1, 2, 5, 7$ sind die Blätter des Baums T_1.
- Knoten a, b, d, e sind die Blätter des Baums T_2.

Bäume und Wälder

Definition 1

Ein Baum ist ein zusammenhängender, kreisfreier Graph. Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.
Ein Knoten v eines Baums mit Grad $\deg(v) = 1$ heißt Blatt.



Ein Wald mit 4 Zusammenhangskomponenten

Einfache Eigenschaften

Lemma 2

Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Blätter.

Beweis

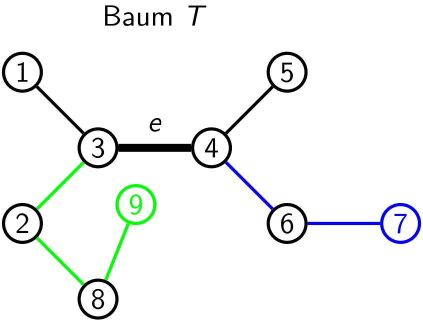
Konstruieren Pfad, so dass Anfangs- und Endknoten Blätter sein müssen.

- *Wählen beliebige Kante $e \in E, e = \{u, v\}$.*
- *Durchlaufen von u und v Wege W_u, W_v im Graphen T, bis wir zu Knoten gelangen, aus denen wir nicht mehr hinauskommen.*
- *Da T ein Baum ist, sind W_u, W_v sogar Pfade.*
- *Die Endknoten von W_u, W_v müssen daher unterschiedliche Blätter in T sein.*

Einfache Eigenschaften

Lemma 2

Jeder Baum $T = (V, E)$ mit $|V| \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Blätter.



Einfache Eigenschaften

Lemma 3

Ist $T = (V, E)$ ein Baum mit $|V| \geq 2$ Knoten und $u \in V$ ein Blatt, so ist der durch $V' = V \setminus \{u\}$ induzierte Teilgraph T' ebenfalls ein Baum.

Beweis

Kreisfreiheit von T':

Durch Entfernen von Kanten aus T können keine Kreise entstehen.

Zusammenhang von T':

- *Betrachten zwei Knoten $x, y \in V \setminus \{u\}$ und zeigen, dass x, y in T' durch einen Pfad verbunden sind.*
- *In T gibt es einen Pfad $P_{x,y}$ der x und y verbindet.*
- *Da die inneren Knoten eines Pfades Grad 2 besitzen, aber* $\deg(u) = 1$, *ist u nicht in $P_{x,y}$ enthalten.*
- *$P_{x,y}$ ist ein Pfad in T'.*

Einfache Eigenschaften

Satz 4

Ist $T = (V, E)$ ein Baum, so gilt

$$|E| = |V| - 1.$$

Beweis (durch Widerspruch)

- Sei $T_0 = (V_0, E_0)$ ein kleinstes Gegenbeispiel. Also
  - T_0 ist ein Baum mit $|E_0| \neq |V_0| - 1$
  - Für jeden Baum $T = (V, E)$ mit $|V| < |V_0|$ gilt $|E| = |V| - 1$.
- $|V_0| \geq 2$, da für Bäume mit einem Knoten der Satz korrekt ist.
- T_0 enthält mindestens zwei Blätter u, v (Lemma 2).
- Sei u' der einzige Knoten, mit dem u in T_0 durch eine Kante verbunden ist.
- Betrachten $T' = (V', E')$, $V' = V_0 \setminus \{u\}$, $E' = E_0 \setminus \{\{u, u'\}\}$.

Einfache Eigenschaften

Satz 4

Ist $T = (V, E)$ ein Baum, so gilt

$$|E| = |V| - 1.$$

Beweis (durch Widerspruch)

- Betrachten $T' = (V', E'), V' = V_0 \setminus \{u\}, E' = E_0 \setminus \{\{u, u'\}\}$.
- Nach Konstruktion ist T' ein Baum.
- Da $|V'| < |V_0|$ und T_0 kleinstes Gegenbeispiel war, gilt $|E'| = |V'| - 1$.
- $|V_0| = |V'| + 1$ und $|E_0| = |E'| + 1$.
- Damit gilt $|E_0| = |V_0| - 1$ im Widerspruch zur Annahme.

Einfache Eigenschaften

Lemma 5

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und C ein Kreis in G. Dann gilt für alle im Kreis C enthaltenen Kanten e:

$$G_e := (V, E \setminus \{e\}) \text{ ist zusammenhängend.}$$

Beweis (durch Widerspruch)

- *Angenommen G_e ist nicht zusammenhängend und habe mindestens zwei Zusammenhangskomponenten G_1, G_2.*
- *Insbesondere liegen die Endknoten der Kante $e = \{u, v\}$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von G_e.*
- *Da e in einem Kreis C liegt, existiert ein u-v-Pfad in G, der e nicht enthält.*
- *Dann liegen u, v in einer Zusammenhangskomponente von G_e, im Widerspruch zur Annahme.*

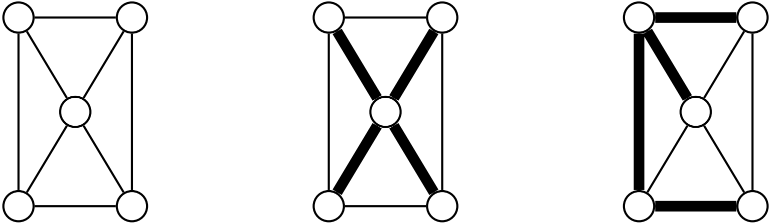
Spannbäume

Definition 6

Sei $G = (V_G, E_G)$ ein zusammenhängender Graph. Ein Teilgraph $T = (V_T, E_T)$ heißt Spannbaum von G, falls T ein Baum mit

$$V_T = V_G \text{ und } E_T \subseteq E_G$$

ist.



Existenz von Spannbäumen

Satz 7

Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Spannbaum.

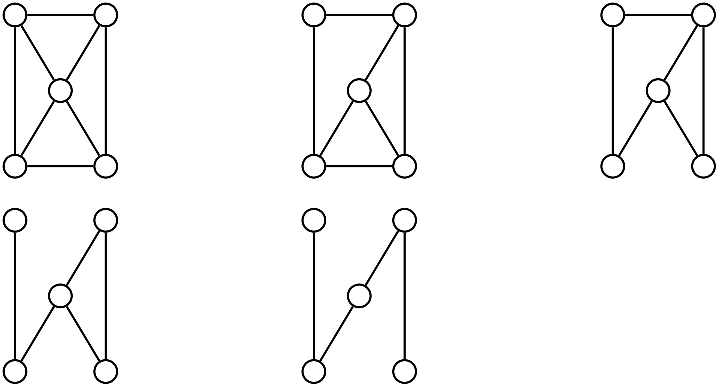
Beweis

- *Für Graphen mit* $|V| = 1$ *ist die Aussage des Satzes korrekt.*
- *Für Graphen* $G = (V, E)$ *mit* $|V| \geq 2$ *betrachten wir folgendes Verfahren.*
  1. *Setze* $E_T := E$.
  2. *Solange* $T := (V, E_T)$ *Kreise enthält*
  3.   *Wähle beliebige Kante* e *in einem beliebigen Kreis von* T.
  4.   *Entferne* e *aus* E_T*, also setze* $E_T := E_T \setminus \{e\}$.
- *Wenn das Verfahren stoppt, enthält* T *keinen Kreis mehr und ist zusammenhängend, also ist* T *dann ein Spannbaum von* G.
- *Das Verfahren stoppt, da ein Graph mit mindestens zwei Knoten und ohne Kanten nicht zusammenhängend ist.*

Existenz von Spannbäumen

Satz 7

Jeder zusammenhängende Graph enthält einen Spannbaum.



Minimale Spannbäume

Gewicht von Teilgraphen

- $G = (V, E)$ Graph mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$
- $H = (V_H, E_H)$ Teilgraph von G
- Das Gewicht $w(H)$ von H ist definiert als

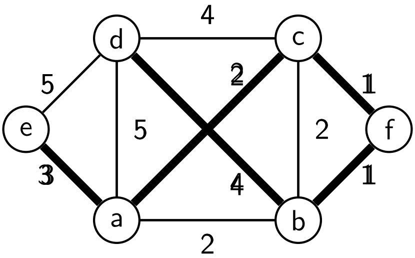
$$w(H) := \sum_{e \in E_H} m(e).$$

Definition 8

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$. Ein Spannbaum $T = (V_T, E_T)$ heißt minimaler Spannbaum von G, wenn er unter allen Spannbäumen von G minimales Gewicht besitzt, also:

$$W(T) = \min_{T' \text{ Spannbaum von } G} w(T').$$

Minimale Spannbäume - Beispiel

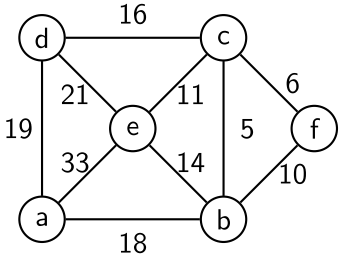


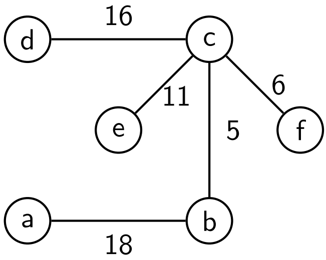
Modellierung durch Graphen - Verbindungsprobleme

- Eine Menge von Stationen soll durch eine Menge von (direkten) Kommunikationsverbindungen so verknüpft werden, dass je zwei Stationen (indirekt über weitere Stationen) miteinander kommunizieren können.
- Die Verbindung zweier Stationen ist mit gewissen, von den Stationen abhängenden Kosten verbunden. Manche Paare von Stationen können nicht miteinander verbunden werden.
- Gesucht ist eine Menge von Verbindungen, die möglichst geringe Kosten verursacht und die paarweise Kommunikation zwischen den Stationen ermöglicht.

Verbindungsprobleme als minimale Spannbäume

- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Stationen, die Kanten sind direkte Kommunikationsverbindungen zwischen Städten.
- Die Kantenmarkierunen sind die Kosten, die das Errichten dieser Verbindung verursacht.
- Gesucht ist ein minimaler Spannbaum.





Variante

- Konstruktion von Autobahnnetzen und Eisenbahnnetzen
- Verbindungen auf einem Halbleiter/Chip
- Telefonverbindungen
- Stromverbindungen zwischen Gebäuden
- Wasserrohre, Kanalisationsrohre
- Verbindungen für ein LAN (local area network)

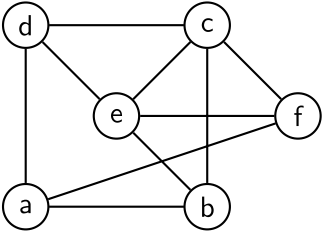
Modellierung von Zuordnungsproblemen

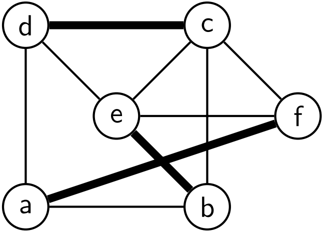
- In einem Seminar sollen Teams von je zwei Studierenden ein Thema bearbeiten. Dabei sollen nur befreundete Studierende ein Team bilden. Gibt es eine solche Aufteilung? Wenn ja, wie sieht sie aus?
- In einem Seminar mit n Studierenden sollen k Teams jeweils ein Thema bearbeiten. Dabei sollen Studierende, die sich nicht ausstehen können, in unterschiedliche Teams. Gibt es eine solche Aufteilung der n Studierenden in k Teams ? Wenn ja, wie sieht sie aus?

Modellierung von Zuordnungsproblemen

- Ein Gruppe unterschiedlich ausgebildeter Informatiker soll zur Wartung von Softwarepaketen eingesetzt werden. Dabei soll jeder Informatiker nur für ein Softwarepaket eingesetzt werden, für das er auch ausgebildet ist. Gibt es eine entsprechende Zuteilung? Wenn ja, wie sieht sie aus?
- Auf l Spezialcomputern sollen k unterschiedliche Aufgaben gelöst werden. Dabei können jedoch nicht alle Aufgaben auf jedem Computer gelöst werden. Außerdem soll jeder Computer höchstens eine Aufgabe lösen müssen. Gibt es ein solche Zuordnung von Aufgaben auf Computer? Wenn ja, wie sieht sie aus?

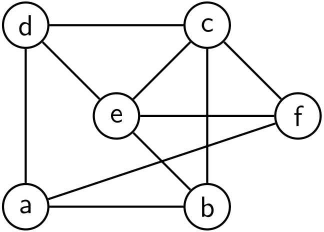
Modellierung durch Graphen - Zuordnung von Seminarthemen

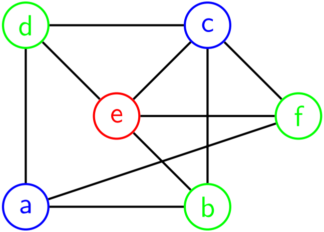




- Knoten repräsentieren Studierende.
- Kanten repräsentieren Freundschaften
- Fette Kanten sind eine mögliche Zuordnung zu Teams von Freunden.

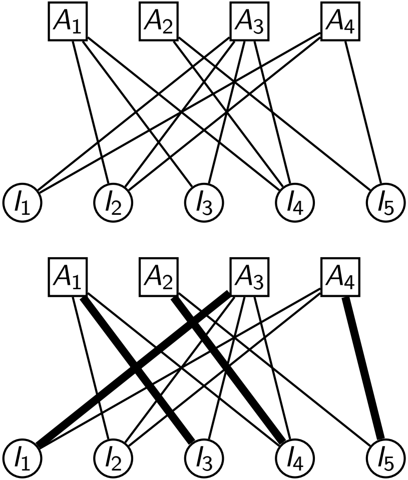
Modellierung durch Graphen - Zuordnung von Seminarthemen





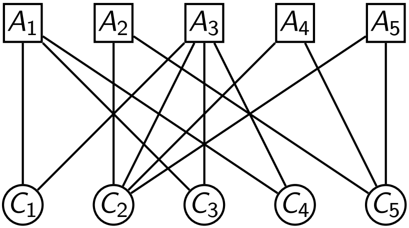
- Knoten repräsentieren Studierende.
- Kanten repräsentieren Abneigungen.
- Anzahl der Themen ist 3.
- Farben markieren eine mögliche Zuordnung von Themen.

Modellierung durch Graphen - Zuordnung von Wartungsjobs



- Eckige Knoten repräsentieren Aufgaben.
- Runde Knoten repräsentieren Informatiker.
- Kanten repräsentieren „kann warten"-Beziehung.
- Fette Kante sind eine mögliche Zuordnung von Informatikern zu Wartungsaufgaben.

Modellierung durch Graphen - Zuteilung von Rechenaufgaben



- Eckige Knoten repräsentieren Aufgaben.
- Runde Knoten repräsentieren Computer.
- Kanten repräsentieren „kann lösen“-Beziehung.
- Eine korrekte Zuordnung von Aufgaben zu Computern ist nicht möglich, da die drei Aufgaben A_2, A_4, A_5 jeweils nur auf den Computern C_2, C_5 gelöst werden können.

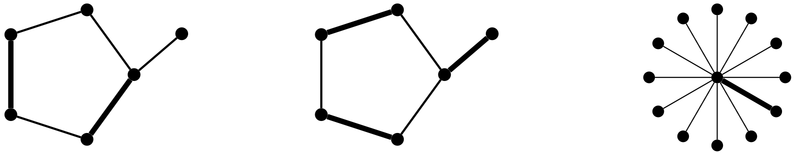
Matchings

Definition 9

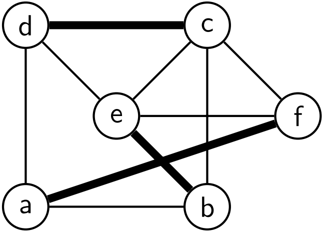
Eine Kantenmenge $M \subseteq E$ heißt Matching in einem Graphen $G = (V, E)$, falls kein Knoten des Graphen zu mehr als einer Kante aus M inzident ist, also falls

$$e \cap f = \emptyset \quad \text{für alle } e, f \in M \text{ mit } e \neq f.$$

Man sagt, dass ein Knoten v von M überdeckt wird, falls es eine Kante $e \in M$ gibt, die v enthält. Ein Matching heißt perfektes Matching, wenn jeder Knoten durch genau eine Kante aus M überdeckt wird, also falls $|M| = |V|/2$.



Modellierung durch Graphen - Zuordnung von Seminarthemen



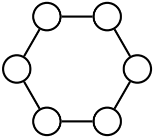
- Knoten repräsentieren Studierende.
- Kanten repräsentieren Freundschaften.
- Fette Kanten sind eine mögliche Zuordnung zu Teams von Freunden.
- Zuordnung möglich, da der Graph ein perfektes Matching besitzt.

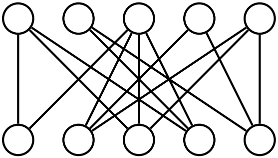
Bipartite Graphen

- Schreiben $A \uplus B$ für die Vereinigung von disjunkten Mengen A, B.

Definition 10

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, falls die Knotenmenge V die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen A und B ist, und jede Kante $e \in E$ eine Endknoten in A und einen Endknoten in B besitzt.
Für bipartite Graphen G schreiben wir $G = (A \uplus B, E)$.





Existenz von Matchings

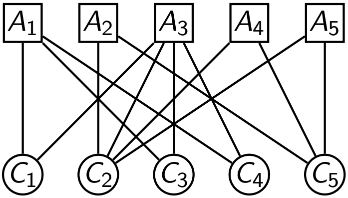
- Graph $G = (V, E), X \subseteq V$
- $\Gamma(X) := \bigcup_{v \in X} \Gamma(v)$ heißt die Nachbarschaft der Knotenmenge X.

Satz 11 (Hall, Heiratssatz)

Für einen bipartiten Graph $G = (A \uplus B, E)$ gibt es genau dann ein Matching M der Größe $|M| = |A|$, wenn gilt

$$|\Gamma(X)| \geq |X| \quad \textit{für alle } X \subseteq A.$$

Modellierung durch Graphen - Zuteilung von Rechenaufgaben



- Eckige Knoten repräsentieren Aufgaben.
- Runde Knoten repräsentieren Computer.
- Kanten repräsentieren „kann lösen“-Beziehung.
- Eine korrekte Zuordnung von Aufgaben zu Computern ist nach dem Satz von Hall nicht möglich,

$$|\Gamma(\{A_2, A_4, A_5\})| < |\{A_2, A_4, A_5\}|.$$

Beweis des Satzes von Hall

Beweis

„ $\Rightarrow$ “ :

- M Matching mit $|M| = |A|$ und betrachten $H = (A \uplus B, M)$.
- Nach Definition eines Matching gilt für alle $X \subseteq A$, dass die Nachbarschaft von X in H genau $|X|$ Elemente enthält.
- Da H ein Teilgraph von G ist, enthält damit für jedes $X \subseteq A$ die Nachbarschaft von X in G mindestens $|X|$ Elemente.

Beweis des Satzes von Hall

Beweis

„ $\Leftarrow$ “ : Sei $|A| = n$ und M ein Matching mit $m < n$ Kanten. Zeigen, dass dann ein größeres Matching existiert, also ein Matching mit mindestens $m + 1$ Kanten.

- Nennen die Kanten in M grün, die anderen Kanten blau.
- Da $m < n$, existiert ein Knoten $a_0 \in A$, der zu keiner grünen Kante inzident ist.
- Konstruieren Pfad P, beginnend in a_0, der
  - abwechselnd aus blauen und grünen Kanten besteht,
  - mit einer blauen Kante endet
  - an einem Knoten b endet, der zu keiner grünen Kante inzident ist.
- Entfernen alle grünen Kanten in P aus M und fügen alle blauen Kanten in P zu M hinzu.
- Erhalten so Matching mit $m + 1$ Kanten.

Beweis des Satzes von Hall

Beweis

„ $\Leftarrow$ “ : Konstruktion des Pfads P:

- Da $|\Gamma(\{a_0\})| \geq 1$, existiert ein zu a_0 Knoten adjazenter Knoten b_0, Kante $\{a_0, b_0\}$ ist blau.
- Ist b_0 zu keiner grünen Kante inzident, ist (a_0, b_0) der gesuchte Pfad P.
- Konstruieren jetzt Folgen von Knoten $a_i \in A$ und $b_i \in B$ wie folgt:
  - Wird b_k nicht von M überdeckt, endet die Konstruktion.
  - Wird b_k von M überdeckt, sei a_{k+1} ein Nachbar von b_k in M.
  - Wählen außerdem einen beliebigen Knoten aus $\Gamma(\{a_0, \ldots, a_{k+1}\}) \setminus \{b_0, \ldots, b_k\}$ und nennen diesen b_{k+1}.
- Zwischen a_0 und dem letzten gefundenen Knoten existiert dann ein Pfad P mit den gewünschten Eigenschaften.

Illustration der Konstruktion

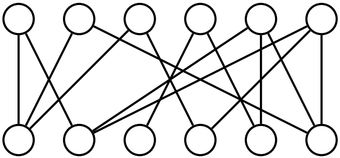


Illustration der Konstruktion

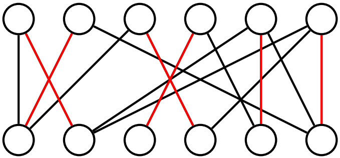
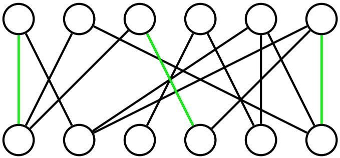


Illustration der Konstruktion



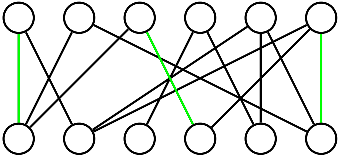


Illustration der Konstruktion

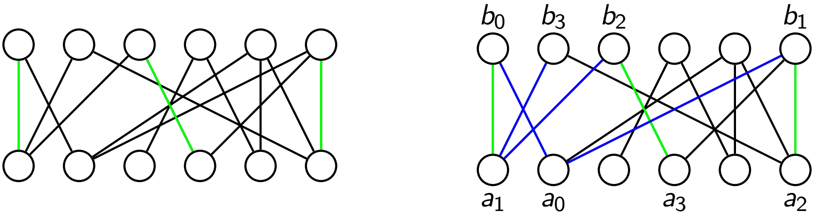
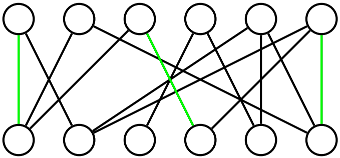
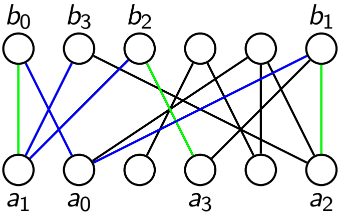


Illustration der Konstruktion





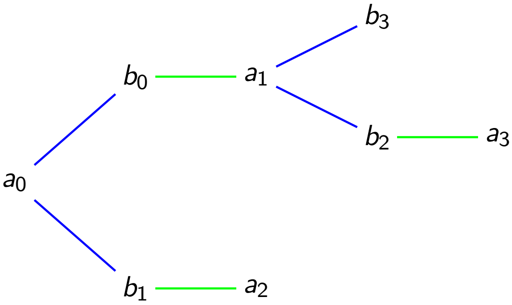
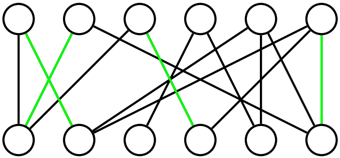
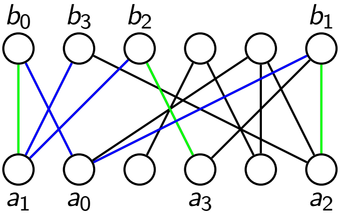
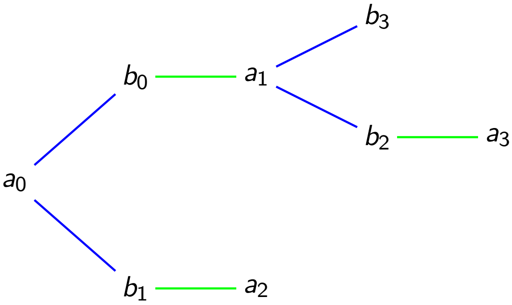


Illustration der Konstruktion







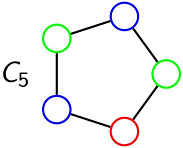
Knotenfärbungen von Graphen

Definition 12

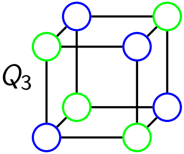
Eine Knotenfärbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit k Farben ist eine Abbildung $c : V \to \{1, \ldots, k\}$, so dass gilt:

$$c(u) \neq c(v) \quad \text{für alle Kanten } \{u, v\} \in E.$$

Die chromatische Zahl $\chi(G)$ eines Graphen ist die minimale Anzahl Farben, die für eine Knotenfärbung von G benötigt werden. Ist $\chi(G) \leq k$, so heißt G k-färbbar.

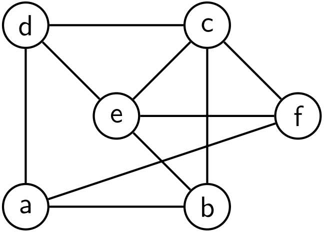


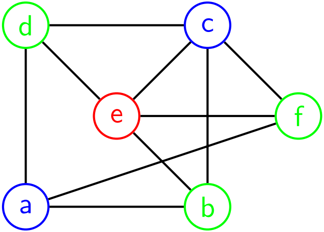
- C_5 ist 3-färbbar.
- C_5 ist nicht 2-färbbar.



- Q_3 ist 2-färbbar.

Modellierung durch Graphen - Zuordnung von Seminarthemen





- Knoten repräsentieren Studierende.
- Kanten repräsentieren Abneigungen.
- Anzahl der Themen ist 3.
- Zuordnung möglich, da der Graph 3-färbbar ist.

2-färbbare und bipartite Graphen

Satz 13

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er 2-färbbar ist.

Satz 14

Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader Länge als Teilgraphen enthält.