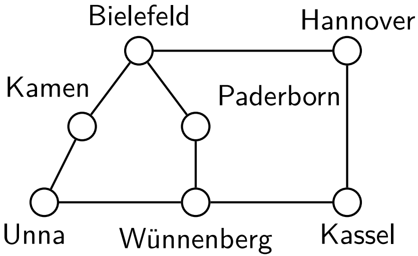
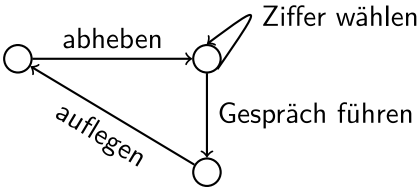
Übersicht

- Graphen beschreiben Objekte und Beziehungen zwischen ihnen
- geeignet für Modellierung verschiedener Ausgaben
- betrachten endliche, gerichtete und endliche, ungerichtete Graphen
- Graphen bestehen aus Knoten und Kanten
- Knoten sind Menge gleichartiger Objekte
- Kanten beschreiben Beziehungen zwischen zwei Objekten





Graphen

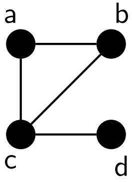
Definition 1

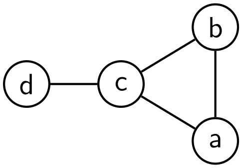
Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Paar (V, E), wobei V eine endliche nicht-leere Menge von Knoten (engl. vertices) ist. Die Menge E ist eine Teilmenge der Menge der zweielementigen Teilmengen von V, also

$$E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}.$$

Die Elemente der Menge E bezeichnet man als Kanten (engl. edges).

$$\begin{aligned} G &= (V, E) \\ V &= \{a, b, c, d\} \\ E &= \{\{a, b\}, \{a, c\}, \\ &\qquad \{c, d\}, \{c, b\}\} \end{aligned}$$





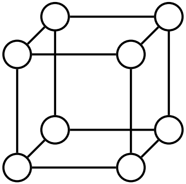
Graphen

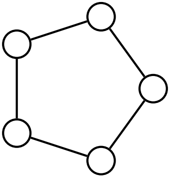
Definition 1

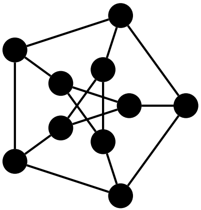
Ein (ungerichteter) Graph G ist ein Paar (V, E), wobei V eine endliche nicht-leere Menge von Knoten (engl. vertices) ist. Die Menge E ist eine Teilmenge der Menge der zweielementigen Teilmengen von V, also

$$E \subseteq \binom{V}{2} := \{\{x, y\} \mid x, y \in V, x \neq y\}.$$

Die Elemente der Menge E bezeichnet man als Kanten (engl. edges).



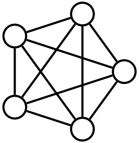




Einige Graphfamilien

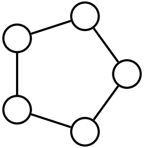
- Ein **vollständiger Graph** K_n auf n Knoten besteht aus n Knoten, die paarweise miteinander durch Kanten verbunden sind.

K_5



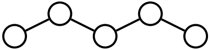
- Ein (einfacher) **Kreis** C_n auf $n \geq 3$ Knoten besteht aus n Knoten, die zyklisch miteinander verbunden sind.

C_5



- Ein **Pfad** P_n besteht aus $n+1$ Knoten und n Kanten, die aufeinander folgende Knoten miteinander verbinden

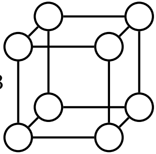
P_4



Einige Graphfamilien

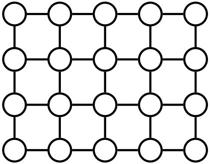
- Ein d-dimensionaler **Hyperwürfel** Q_d hat als Knotenmenge $\{0, 1\}^d$. Zwei Elemente dieser Menge sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich ihre Folgen an genau einer Stelle unterscheiden.

Q_3



- Ein **Gittergraph** $G_{n\times m}$ besteht aus $n \cdot m$ Knoten, die in einem $n \times m$ Gitter angeordnet sind. Zwei Knoten sind durch eine Kante verbunden, wenn sie in einer Zeile nebeneinander oder in einer Spalte untereinander stehen.

$G_{4\times 5}$



Nachbarschaft und Knotengrad

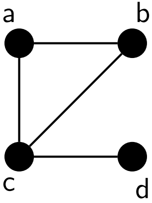
Definition 2

Für einen Knoten v eines Graphen $G = (V, E)$ definieren wir die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ von v durch

$$\Gamma(v) := \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Der Grad von v bezeichnet die Größe der Nachbarschaft von v:

$$\deg(v) := \big|\Gamma(v)\big|.$$



- $\Gamma(a) = \{b, c\}$
- $\deg(a) = 2$
- $\Gamma(d) = \{c\}$
- $\deg(d) = 1$

Nachbarschaft und Knotengrad

Definition 2

Für einen Knoten v eines Graphen $G = (V, E)$ definieren wir die Nachbarschaft $\Gamma(v)$ von v durch

$$\Gamma(v) := \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}.$$

Der Grad von v bezeichnet die Größe der Nachbarschaft von v:

$$\deg(v) := \big|\Gamma(v)\big|.$$

- Für eine Kante $e = \{u, v\} \in E$ heißen u, v **Endknoten** von e.
- Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen **adjazent**, wenn sie durch eine Kante verbunden sind, d.h. $\{u, v\} \in E$.
- Ein Knoten $v \in V$ und eine Kante $e \in E$ heißen **inzident**, wenn v einer der Endknoten von e ist.

Knotengrade

Satz 3

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Beweis

Doppeltes Abzählen:

- *Auf der linken Seite wird jede Kanten $\{u, v\}$ zweimal gezählt, für* $\deg(u)$ *und für* $\deg(v)$.
- *Auf der rechten Seite wird jede Kante $\{u, v\}$ ebenfalls zweimal gezählt.*

Knotengrade

Satz 4

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt, dass die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Beweis

- $V_g := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ ist gerade}\}$
- $V_u := \{v \in V \mid \deg(v) \text{ ist ungerade}\}$
- $V = V_g \cup V_u$

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_g} \deg(v) + \sum_{v \in V_u} \deg(v)$$

Knotengrade

Satz 4

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ gilt, dass die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade ist.

Beweis

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V_g} \deg(v) + \sum_{v \in V_u} \deg(v)$$

- $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ ist gerade.
- $\sum_{v \in V_g} \deg(v)$ ist gerade, da jeder Summand gerade.
- Jeder Summand in $\sum_{v \in V_u} \deg(v)$ ist ungerade.

$\Rightarrow |V_u|$ ist gerade.

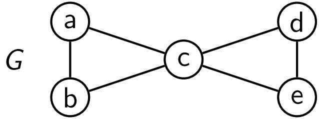
Wege

Definition 5

Ein Weg der Länge $l, l \in \mathbb{N}$, in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $W = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ von Knoten aus V, so dass je zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind, also

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, l-1.$$

v_0 wird Anfangsknoten und v_l wird Endknoten des Weges W genannt. Alle anderen Knoten werden innere Knoten genannt. Ein Pfad ist ein Weg, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.



- (a, c, d, e, c, b) ist ein Weg, aber kein Pfad in G.
- (a, b, c) ist ein Pfad in G.

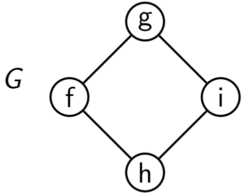
Wege

Definition 5

Ein Weg der Länge $l, l \in \mathbb{N}$, in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $W = (v_0, v_1, \ldots, v_l)$ von Knoten aus V, so dass je zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante miteinander verbunden sind, also

$$\{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, l-1.$$

v_0 wird Anfangsknoten und v_l wird Endknoten des Weges W genannt. Alle anderen Knoten werden innere Knoten genannt. Ein Pfad ist ein Weg, in dem alle Knoten paarweise verschieden sind.



- (f, g, f, h) ist ein Weg, aber kein Pfad in G.
- (f, g, i) ist ein Pfad in G.

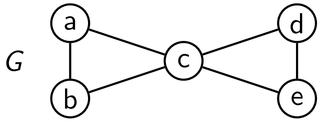
Kreise

Definition 6

Ein Kreis der Länge $l, l \geq 3$, in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $C = (v_1, \ldots, v_l)$ von l Knoten, so dass

$$\{v_1, v_l\} \in E \quad \text{und} \quad \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, l-1,$$

und diese l Kanten paarweise verschieden sind.



- (a, c, b) ist ein Kreis in G.
- (d, e, c) ist ein Kreis in G.
- (a, b, c, d, e, c) ist ein Kreis in G.

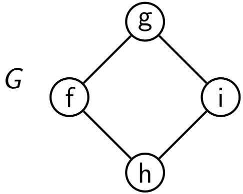
Kreise

Definition 6

Ein Kreis der Länge $l, l \geq 3$, in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge $C = (v_1, \ldots, v_l)$ von l Knoten, so dass

$$\{v_1, v_l\} \in E \quad \text{und} \quad \{v_i, v_{i+1}\} \in E \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, l-1,$$

und diese l Kanten paarweise verschieden sind.



- (f, g, i, h) ist ein Kreis in G.
- (f, g, h, i) ist **kein** Kreis in G.

Teilgraphen und induzierte Teilgraphen

Definition 7

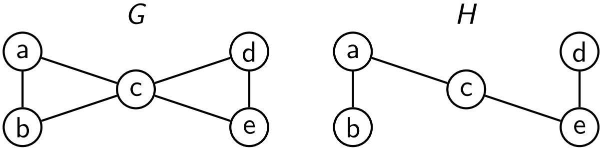
Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt (schwacher) Teilgraph eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls

$$V_H \subseteq V_G \quad \text{und} \quad E_H \subseteq E_G.$$

Enthält E_H alle Kanten aus E_G, deren Endpunkte in V_H liegen, also

$$E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2},$$

so nennt man H einen induzierten Teilgraphen von G.



- H ist Teilgraph, aber nicht induzierter Teilgraph.

Teilgraphen und induzierte Teilgraphen

Definition 7

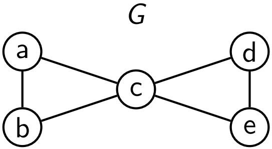
Ein Graph $H = (V_H, E_H)$ heißt (schwacher) Teilgraph eines Graphen $G = (V_G, E_G)$, falls

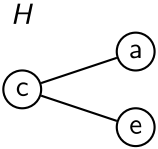
$$V_H \subseteq V_G \quad \text{und} \quad E_H \subseteq E_G.$$

Enthält E_H alle Kanten aus E_G, deren Endpunkte in V_H liegen, also

$$E_H = E_G \cap \binom{V_H}{2},$$

so nennt man H einen induzierten Teilgraphen von G.





- H ist induzierter Teilgraph.

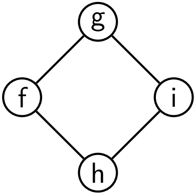
Zusammenhängende Graphen

Ein Pfad im Graphen $G = (V, E)$ mit Anfangsknoten u und Endknoten v heißt u-v-**Pfad** in G.

Definition 8

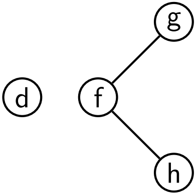
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt zusammenhängend, wenn für jedes Paar von Knoten u und $v \in V$ ein u-v-Pfad in G existiert. Andernfalls heißt der Graph G unzusammenhängend.

G_1



G_1 ist zusammenhängend

G_2



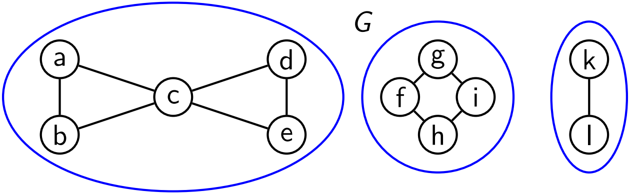
G_2 ist nicht zusammenhängend

Zusammenhangskomponenten

Definition 9

Ein Teilgraph $H = (V_H, E_H)$ des Graphen $G = (V_G, E_G)$ heißt Zusammenhangskomponente des Graphen G, wenn folgende Bedingungen gelten:

1. H ist zusammenhängend.
2. G besitzt keinen anderen Teilgraphen H', der zusammenhängend ist und H als Teilgraphen enthält.



G besitzt 3 Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponenten

Satz 10

Ein Graph $G = (V, E)$ besitzt mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

Beweis

Induktion über $m = |E|$
Induktionsanfang $m = 0$

- $m = 0 \Rightarrow G$ besitzt keine Kanten.
- Jeder Knoten bildet seine eigene Zusammenhangskomponente.
- Anzahl der Zusammenhangskomponenten $|V| = |V| - 0$.

Zusammenhangskomponenten

Satz 10

Ein Graph $G = (V, E)$ besitzt mindestens $|V| - |E|$ viele Zusammenhangskomponenten.

Beweis

Induktionsvoraussetzung Satz korrekt für $G = (V, E)$ mit $|E| \leq m$.
Induktionsschritt $m \to m + 1$

- $G = (V, E)$ besitze $m + 1$ Kanten. Wählen beliebige Kante $e \in E$ und setzen $E' := E \setminus \{e\}$ und $G' := (V, E')$.
- $|E'| = m$ und G' enthält nach Induktionsannahme mindestens $|V| - m$ Zusammenhangskomponenten.
- Hinzunehmen einer Kante kann die Anzahl der Zusammenhangskomponenten höchstens um 1 verringern.
- G besitzt mindestens $|V| - m - 1 = |V| - (m + 1) = |V| - |E|$ Zusammenhangskomponenten.

Zusammenhangskomponenten

Satz 11

Für jeden zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|E| \geq |V| - 1.$$

Beweis

- *Ein zusammenhängender Graph besteht aus einer Zusammenhangskomponente.*

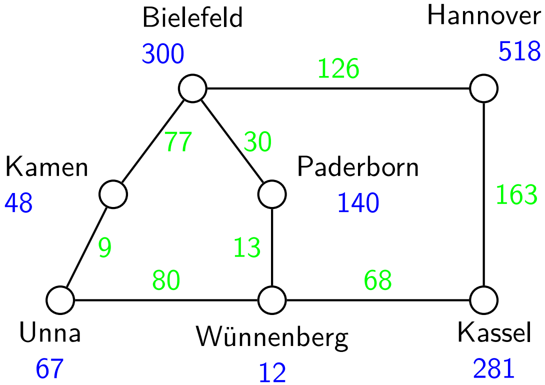
$\Rightarrow$ $|V| - |E| \leq 1$ *(letzter Satz).*

- $|E| \geq |V| - 1$.

Markierungen von Graphen

Eine **Knotenmarkierung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $l : V \to W$, wobei W eine beliebige Menge ist.

Eine **Kantenmarkierung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Funktion $m : E \to U$, wobei U eine beliebige Menge ist.



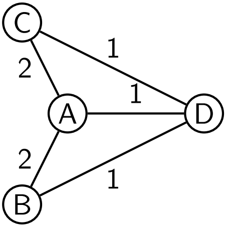
- Knoten-markierungen sind blau.
- Kanten-markierungen sind grün.

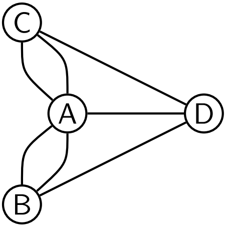
Multigraphen

Definition 12

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $m : E \to \mathbb{N}$ eine Kantenmarkierung. Wir nennen G mit m dann einen Multigraphen. Für $e \in E$ gibt der Funktionswert $m(e)$ die Vielfachheit der Kante e an.

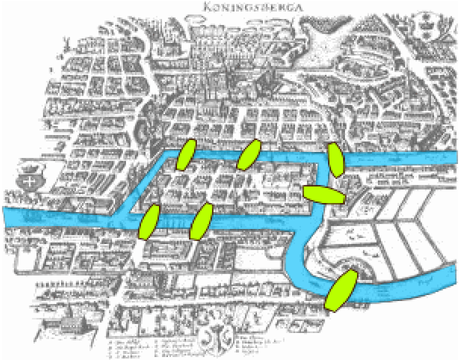
Die Definition von Knotengraden wird auf Multigraphen übertragen, indem bei jeder Kante die Vielfachheit der Kante berücksichtigt wird.





Hinweis Werden in Zukunft häufig nicht mehr zwischen Graphen und Multigraphen unterscheiden.

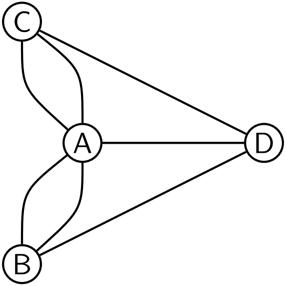
Modellierung mit Graphen - Wegeprobleme Königsberger Brückenproblem



Eulers Fragen:

- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?
- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert?

Modellierung mit Graphen - Wegeprobleme Königsberger Brückenproblem



Eulers Fragen:

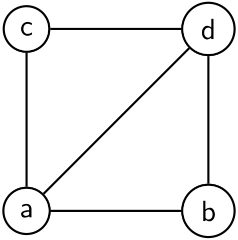
- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?
- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert?

Eulerwege und Eulerkreise

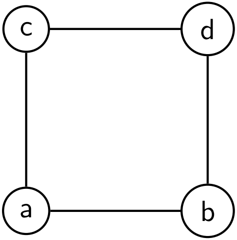
Definition 13

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender (Mulit-)Graph.

1. Ein Weg W in G heißt ein Eulerweg, falls er jede Kante des Graphen genau einmal enthält.
2. Ein Kreis in G heißt ein Eulerkreis, falls er jede Kante des Graphen genau einmal enthält.



Graph besitzt Eulerweg (a, b, d, a, c)



Graph besitzt Eulerkreis (a, b, d, c)

Eulerwege und Eulerkreise

Satz 14

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. G besitzt einen Eulerkreis genau dann, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

Beweis

„ $\Rightarrow$ “ :

- In einem Eulerkreis geht man genauso oft in einen Knoten „hinein“wie „hinaus“.
- Jede Kante wird nur einmal benutzt.
- Jeder Knoten hat geraden Knotengrad.

Eulerwege und Eulerkreise

Satz 14

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. G besitzt einen Eulerkreis genau dann, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

Beweis

„ $\Leftarrow$ “ : Betrachten das folgende Verfahren.

- Starte in einem beliebigen Knoten v_1.
- Durchlaufen Kanten des Graphen in beliebiger Reihenfolge, aber nie eine Kante mehrmals.
- Jeden Knoten $\neq v_1$ können wir wieder verlassen.
- Erhalten Weg W_1, der in v_1 endet.
- Wenn noch nicht alle Kanten durchlaufen wurden, existiert wegen des Zusammenhangs von G ein $v_2 \in W_1$, der zu einer noch nicht durchlaufenen Kante inzident ist.

Eulerwege und Eulerkreise

Satz 14

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. G besitzt einen Eulerkreis genau dann, wenn der Grad aller Knoten gerade ist.

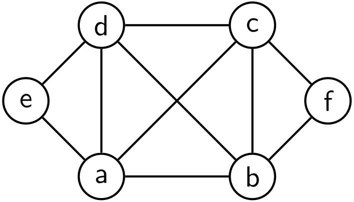
Beweis

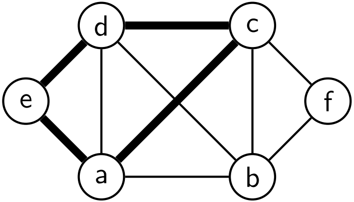
„ $\Leftarrow$ “ :

- Finden wie vorher Weg W_2, der in v_2 beginnt und endet.
- Verschmelzen Wege W_1 und W_2, indem wir
  - W_1 von v_1 bis v_2 durchlaufen.
  - W_2 durchlaufen.
  - Das verbleibende Stück von W_1 durchlaufen.
- Enthält der verschmolzene Weg noch nicht alle Kanten, wählen wir analog zu v_2 einen Knoten v_3, starten neuen Weg und verschmelzen Wege.
- Wiederholen solange, bis der Weg alle Kanten des Graphen enthält.

Eulerwege und Eulerkreise

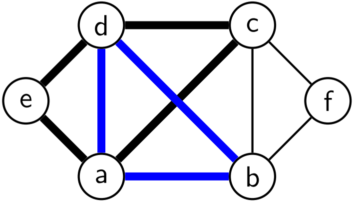
- $v_1 = e$
- $W_1 = (e, d, c, a, e)$
- $v_2 = d$
- $W_2 = (d, b, a, d)$
- neuer Weg
  (e, d, b, a, d, c, a, e)
- $v_3 = c$
- $W_3 = (c, f, b, c)$
- Eulerkreis
  $(e, d, b, a, d, c, f, b, c, a)$;

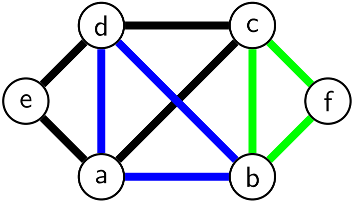




Eulerwege und Eulerkreise

- $v_1 = e$
- $W_1 = (e, d, c, a, e)$
- $v_2 = d$
- $W_2 = (d, b, a, d)$
- neuer Weg (e, d, b, a, d, c, a, e)
- $v_3 = c$
- $W_3 = (c, f, b, c)$
- Eulerkreis $(e, d, b, a, d, c, f, b, c, a)$;



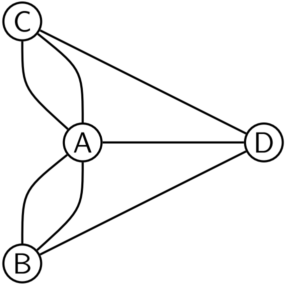


Eulerwege und Eulerkreise

Satz 15

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph. G besitzt einen Eulerweg genau dann, wenn genau zwei Knoten ungeraden Grad haben oder alle Knoten geraden Grad haben.

Königsberger Brückenproblem



1. G besitzt keinen Eulerkreis, da G Knoten mit ungeradem Grad hat.
2. G besitzt keinen Eulerweg, da G vier Knoten mit ungeraden Grad hat.

Eulers Fragen:

- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?
- Gibt es einen Weg, der jede der sieben Brücken genau einmal überquert?

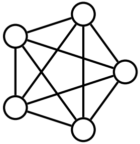
Schiffsverbindungen

- Für eine Inselgruppe aus $n, n \geq 3$, Inseln sollen Schiffsverbindungen organisiert werden.
- Jede Insel soll mit jeder anderen Insel direkt verbunden sein.
- Es steht nur ein Schiff zur Verfügung.
- Gibt es eine Tour, auf der das Schiff jede Verbindung zwischen zwei Inseln genau einmal abfährt?

Modellierung durch Graphen:

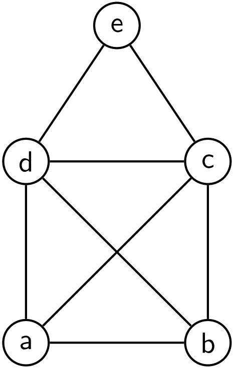
- Besitzt der vollständige Graph K_n auf n Knoten einen Eulerkreis?
- In K_n hat jeder Knoten Grad $n-1$.
- K_n hat einen Eulerkreis genau dann, wenn n ungerade ist.

K_5



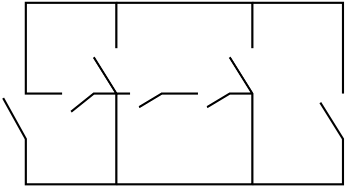
Das Haus vom Nikolaus

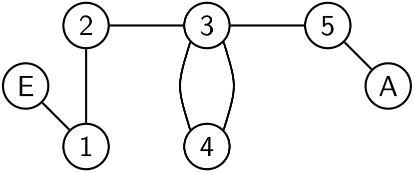
- Kann das „Haus vom Nikolaus“ ohne Absetzen gemalt werden?



Planung eines Gruselkabinetts

- Ein Gruselkabinett mit n Räumen, einer Eingangs- und einer Ausgangstür sowie beliebig vielen Innentüren soll geplant werden.
- Jede Tür schließt nach dem Durchgehen bis zum Verlassen des Kabinetts.
- Die Besucher gehen einzeln durch das Kabinett.
- Wie muss das Kabinett geplant werden, so dass niemand eingesperrt wird?





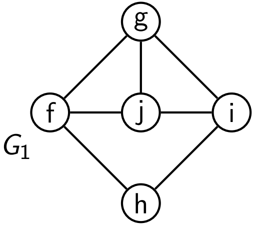
- Der Graph des Kabinetts muss einen Eulerweg von E nach A haben, d.h. E und A müssen als einzige Knoten ungeraden Grad besitzen.

Hamiltonwege und Hamiltonkreise

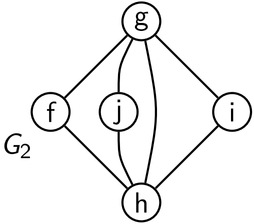
Definition 16

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph.

1. Ein Weg W in G heißt ein Hamiltonweg, falls er jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.
2. Ein Kreis C in G heißt ein Hamiltonkreis, falls er jeden Knoten des Graphen genau einmal enthält.



G_1 besitzt Hamiltonkreis.



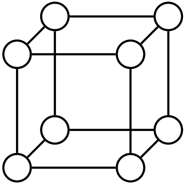
G_2 besitzt keinen Hamiltonkreis, aber den Hamiltonweg (i, h, j, g, f)

Hyperwürfel und der Petersen-Graph

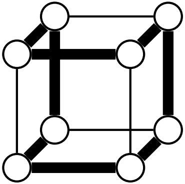
Satz 17

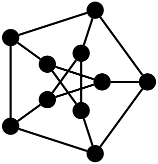
Jeder Hyperwürfel $Q_n, n \geq 3$, besitzt einen Hamiltonkreis.

Q_3



Q_3





Petersen-Graph

Beobachtung Der Petersen-Graph besitzt keinen Hamiltonkreis.

Das Problem des Handlungsreisenden

- Ein Handlungsreisender möchte auf einer Rundreise n Städte besuchen.
- Die Städte sind mit Straßen einer gewissen Länge verbunden. Manche Städte können von anderen Städten eventuell nicht direkt erreicht werden.
- Gesucht ist eine Tour minimaler Länge, die jede Stadt genau einmal besucht.

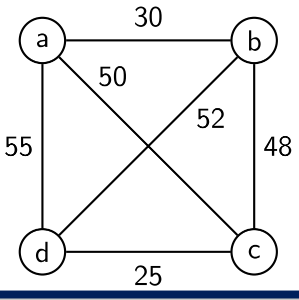
Modellierung durch Graphen:

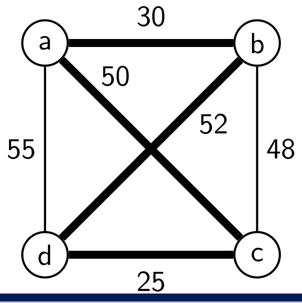
- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierunen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein möglichst kurzer Hamiltonkreis.
- Länge eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.

Das Problem des Handlungsreisenden

Modellierung durch Graphen:

- Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \to \mathbb{N}$.
- Die Knoten sind die Städte, die Kanten sind direkte Verbindungen zwischen Städten, die Kantenmarkierunen sind die Längen der direkten Verbindungen.
- Gesucht ist ein möglichst kurzer Hamiltonkreis.
- Länge eines Hamiltonkreises ist die Summe der Markierungen auf den Kanten des Kreises.





Kreis der Länge 157

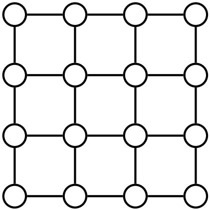
Nachrichten in Parallelrechnern

- Parallelrechner mit n^2 Prozessoren durch $n \times n$ Gitter verbunden.
- Eine Nachricht soll von einem Prozessor zu einem anderen weitergegeben werden, jeden Prozessor genau einmal erreichen und zum Ursprung zurückkehren.
- Für welche n ist dies möglich?

Modellierung durch Graphen:

- Betrachten Gittergraphen $G_{n \times n}$.
- Existiert in $G_{n \times n}$ ein Hamiltonkreis?

$G_{4 \times 4}$



Nachrichten in Parallelrechnern

Beobachtung In $G_{n \times n}$ existiert ein Hamiltonkreis genau dann, wenn n gerade ist.

Beweis für $\Rightarrow$:

- Färben Knoten in $G_{n \times n}$ abwechselnd schwarz und weiß, so dass miteinander verbundene Knoten unterschiedliche Farben haben.
- Auf einem Kreis alternieren die Farben der Knoten des Kreises.
- Ein Kreis berührt die gleiche Anzahl schwarzer und weißer Knoten.
- Anzahl der Knoten n^2 muss gerade sein. Damit muss auch n gerade sein.