Motivation

Idee:
Formulierung von Eigenschaften für Term — Umformung und Vereinfachung

Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = (\{A\}, \mathcal{F})$ und eine Variablenmenge $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ der Sorte A mit $\mathcal{F} = \{f : A \text{ x } A \to A,\ h : A \text{ x } A \to A\}$

Terme werden umgeformt anhand von Regeln.

Ersetzungsregel: $h(f(x, y), z) \to f(h(x, z), h(y, z))$

Term $h(f(x, y), z)$ kann ersetzt werden durch den Term $f(h(x, z), h(y, z))$

Beispiel: Aus $h(h(f(x_1, x_2), x_3), x_4))$ wird $h(f(h(x_1, x_3), h(x_2, x_3)), x_4)$.

Die Ersetzungsregeln werden auch als Axiome bezeichnet.

Konkrete Algebren

Gegeben sei eine Signatur $\Sigma = (\{A\}, \mathcal{F})$ und eine Variablenmenge $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ der Sorte A mit $\mathcal{F} = \{f : A \text{ x } A \to A,\ h : A \text{ x } A \to A\}$

Ersetzungsregel (Axiom): $h(f(x, y), z) \to f(h(x, z), h(y, z))$

Konkrete Algebra: (vgl. Interpretation in der Prädikatenlogik)
- Zuordnung von konkreten Sorten für Sortennamen
- Zuordnung von konkreten Operationen für Operatornamen

Beispiel:

1. Konkreter Grundbereich: A wird zugeordnet $\mathbb{N}$
2. Konkrete Funktionen: f wird zugeordnet $+ : \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
   h wird zugeordnet $* : \mathbb{N} \text{ x } \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Nach der Ersetzung der Operatorsymbole durch konkrete Funktionen gilt für das Axiom die Gleichheit. Die konkrete Algebra ist ein Modell.

$h(f(x, y), z) \to f(h(x, z), h(y, z)$

$*(+(x, y), z) = +(*(x, z), *(y, z)$ (Assoziativgesetz)

Axiome

Definition 1

Sei $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ eine Signatur. Ein Axiom hat die Form $t_1 \to t_2$, wobei die Terme t_1 und t_2 wohlgeformte Terme der gleichen Sorte sein müssen.

Axiome

Definition 1

Sei $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ eine Signatur. Ein Axiom hat die Form $t_1 \rightarrow t_2$, wobei die Terme t_1 und t_2 wohlgeformte Terme der gleichen Sorte sein müssen.

Signatur $\Sigma = (\{BOOL\}, \mathcal{F})$.

$$\mathcal{F} = \{ \begin{array}{rl} true: & \rightarrow BOOL \\ false: & \rightarrow BOOL \\ f_\wedge: & BOOL \text{ x } BOOL \rightarrow BOOL \\ f_\vee: & BOOL \text{ x } BOOL \rightarrow BOOL \\ f_\neg: & BOOL \rightarrow BOOL \end{array} \}$$

Axiome: Seien x und y Variable der Sorte $BOOL$.

$Q_1 : f_\neg(true) \rightarrow false$

$Q_2 : f_\neg(false) \rightarrow true$

$Q_3 : f_\wedge(true, x) \rightarrow x$

$Q_4 : f_\wedge(false, x) \rightarrow false$

$Q_5 : f_\vee(x, y) \rightarrow f_\neg(f_\wedge(f_\neg(x), f_\neg(y)))$

Abstrakte Algebra

Definition 2

Sei $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ eine Signatur mit zugehörigen Variablenmengen und Q eine endliche Menge von Axiomen, dann wird $((\mathcal{S}, \mathcal{F}), Q)$ als **abstrakte Algebra** bezeichnet. Alternativ wird auch für die Menge τ der wohlgeformten Terme der Signatur $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ die abstrakte Algebra durch $(\tau, (\mathcal{S}, \mathcal{F}), Q)$ angegeben.

Term-Umformung

Definition 3

Sei $((\mathcal{S}, \mathcal{F}), Q)$ eine abstrakte Algebra mit zugehörigen Variablenmengen.
Seien $s_1 = w_1 r_1 w_2$ und $s_2 = v_1 r_2 v_2$ zwei Terme mit Untertermen r_1 und r_2.
(w_1, w_2, v_1, v_2 sind Zeichenreihen, die auch leer sein können.)
Sei $t_1 \to t_2$ ein Axiom in Q und es gebe eine Substitution σ mit $r_1 = t_1\sigma$ und $r_2 = t_2\sigma$.
Dann ist der Term s_1 in einem Schritt in den Term s_2 umformbar.

Wir sagen, ein Term s ist in einen Term t umformbar genau dann, wenn es eine endliche Folge von Umformungen ausgehend von s nach t gibt, d.h. $s = s_1, s_1$ nach $s_2, \ldots, s_{n-1}$ nach s_n $s_n = t$ gibt.

Beispiel:

$s_1 = f_\neg(f_\wedge(true, f_\vee(x, y)))$ Axiom: $Q_3 : f_\wedge(true, x) \to x$

$r_1 = f_\wedge(true, f_\vee(x, y)) = t_1\sigma = f_\wedge(true, x)[x/f_\vee(x, y)]$

$r_2 = t_2\sigma = x[x/f_\vee(x, y)]) = f_\vee(x, y)$

Also sei $s_2 = f_\neg(f_\vee(x, y))$, dann ist s_1 nach s_2 umformbar.

Konkrete Algebra

Definition 4

Sei $((\mathcal{S}, \mathcal{F}), Q)$ mit $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ und den zugehörigen Variablenmengen V_i. Eine **konkrete Algebra** (Ω, F, Q) besteht aus:

1. Jeder Sorte S_i ordnen wir einen nicht-leeren Grundbereich ω_i zu.
2. Ω ist die Menge der Grundbereiche ω_i inklusive der Zuordnung.
3. Jeder Operation $f : S_1 \; x \ldots x \; S_r \rightarrow S_k$ ordnen wir eine konkrete Funktion $f^* : \omega_1 \; x \ldots, x \; \omega_r \rightarrow \omega_k$ zu.
4. F ist die Menge der konkreten Funktionen.
5. Der Einfachheit halber seien die Variablen der Grundbereiche ω_i gerade die Variablen der Sorte S_i.

Sprechweise: Die konkrete Algebra wird auch als Modell der abstrakten Algebra bezeichnet.

Modell, abstrakte Algebra

Definition 5

Sei $((\mathcal{S}, \mathcal{F}), Q)$ eine abstrakte Algebra und sei (Ω, F, Q) eine (passende) zugehörige konkrete Algebra.
(Ω, F, Q) ist ein Modell der abstrakten Algebra genau dann, wenn für alle Axiome $t_1 \to t_2$ aus Q gilt: Nach Ersetzung aller Operationen in t_1 und t_2 durch die zugehörigen konkreten Funktionen, die Ergebnisse der Ersetzung seien t_1^* bzw. t_2^*, muss $t_1^* = t_2^*$ gelten.
(Für die konkrete Algebra gilt im Fall von Axiomen die Gleichheit der linken und rechten Seite der Axiome.)

Algebren

Beispiel:

Signatur $\Sigma = (\{A\}, \mathcal{F})$ und Variablenmenge $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mit
$\mathcal{F} = \{f : A \; x \; A \rightarrow A, h : A \; x \; A \rightarrow A\}$ sowie Axiome
$\{h(f(x,y),z) \rightarrow f(h(x,z),h(y,z))\}$

Konkrete Algebra:
$(\mathbb{N}, \{+ : \mathbb{N} x \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \; * : \mathbb{N} x \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}, \{*(+(x,y),z) \rightarrow +(*(x,z),*(y,z))\})$

Grundbereich: $\mathbb{N}$
Funktionen: f wird die Addition $+$ zugeordnet,
h wird die Multiplikation $*$ zugeordnet
Das einzige Axiom ist $h(f(x,y),z) \rightarrow f(h(x,z)h(y,z))$

Dann gilt für das Axiom

$*(+(x,y),z) = +(*(x,z),*(y,z))$ (Assoziativgesetz)

Algebren

Beispiel: Abstrakte Algebra *BOOL*

Signatur $\Sigma = (\{BOOL\}, \mathcal{F})$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{ \quad & \mathit{true} : && \to BOOL \\
& \mathit{false} : && \to BOOL \\
& f_\wedge : && BOOL \text{ x } BOOL \to BOOL \\
& f_\vee : && BOOL \text{ x } BOOL \to BOOL \\
& f_\neg : && BOOL \to BOOL \qquad \}
\end{aligned}
$$

Axiome: Seien x und y Variable der Sorte *BOOL*.

$Q_1 : f_\neg(\mathit{true}) \to \mathit{false}$
$Q_2 : f_\neg(\mathit{false}) \to \mathit{true}$
$Q_3 : f_\wedge(\mathit{true}, x) \to x$
$Q_4 : f_\wedge(\mathit{false}, x) \to \mathit{false}$
$Q_5 : f_\vee(x, y) \to f_\neg(f_\wedge(f_\neg(x), f_\neg(y)))$

Algebren

Beispiel: Konkrete Algebra für *BOOL*

Signatur $\Sigma = (\{BOOL\}, \mathcal{F})$.		$\omega := Bool := \{0, 1\}$
$\mathcal{F} = \{$	$true : \ \rightarrow BOOL$	$true^* := 1$
	$false : \ \rightarrow BOOL$	$false^* := 0$
	$f_\wedge : BOOL \ x \ BOOL \rightarrow BOOL$	$f_\wedge^*(v_1, v_2) := min(v_1, v_2)$
	$f_\vee : BOOL \ x \ BOOL \rightarrow BOOL$	$f_\vee^*(v_1, v_2) := max(v_1, v_2)$
	$f_\neg : BOOL \rightarrow BOOL \quad \}$	$f_\neg^*(0) := 1, f_\neg^*(1) := 0$

Axiome: Seien x und y Variable der Sorte *BOOL*.

$Q_1 : f_\neg(true) \rightarrow false$
$Q_2 : f_\neg(false) \rightarrow true$
$Q_3 : f_\wedge(true, x) \rightarrow x$
$Q_4 : f_\wedge(false, x) \rightarrow false$
$Q_5 : f_\vee(x, y) \rightarrow f_\neg(f_\wedge(f_\neg(x), f_\neg(y)))$

Für die Axiome gilt die Gleichheit zwischen linkem und rechtem Term.

Algebren

Beispiel: Alternative konkrete Algebra für *BOOL*

Für die abstrakte Algebra aus der vorherigen Folie ist die folgende konkrete Algebra ein Modell:

1. Der Grundbereich sei $\omega = \{\emptyset, \{1\}\}$ (leere Menge und Einermenge)
2. Konstante $\emptyset$ für *false*
3. Konstante $\{1\}$ für *true*
4. Mengendurchschnitt $\cap$ für $f_\wedge$
5. Mengenvereinigung $\cup$ für $f_\vee$
6. Mengenkomplement bzgl. $\{1\}$ für $f_\neg$

Algebren

Beispiel: Abstrakte Algebra für *Keller*

Signatur $\Sigma = (S, \mathcal{F})$
Sorten $\mathcal{S} = \{Keller, Element, BOOL\}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{ \quad createStack &: \quad \rightarrow Keller \\
push &: Keller \ x \ Element \rightarrow Keller \\
pop &: Keller \rightarrow Keller \\
top &: Keller \rightarrow Element \\
empty &: Keller \rightarrow BOOL\}
\end{aligned}
$$

Axiome:
$K_1 : empty(createStack) \rightarrow true$
$K_2 : empty(push(k, e)) \rightarrow false$
$K_3 : pop(push(k, e)) \rightarrow k$
$K_4 : top(push(k, e)) \rightarrow e$

Algebren

Beispiel: Konkrete Algebra als Modell für *Keller*

Grundbereiche:

BOOL	ist	$Bool = \{0, 1\}$
Element	ist	$\mathbb{N}_0$
Keller	ist	$\mathbb{N}_0^*$, Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen

Funktionen:

createStack	$newSeries : \ \to \mathbb{N}_0^*$	$newSeries() = ()$
push	$append : \mathbb{N}_0^* \ x\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^*$	$append((a_1, \ldots, a_n), x) = (a_1, \ldots, a_n, x)$
pop	$remove : \mathbb{N}_0^* \to \mathbb{N}_0^*$	$remove((a_1, \ldots, a_n, x)) = (a_1, \ldots, a_n)$
top	$last : \mathbb{N}_0^* \to \mathbb{N}_0$	$last((a_1, \ldots, a_n, x)) = x$
empty	$noElem : \mathbb{N}_0^* \to \{0, 1\}$	$noElem(f) = 1$ gdw. f ist leere Folge.

Es bleibt noch noch zu zeigen, dass die Gleichheit für die Axiome gilt.