Sorten und Terme

Motivation

Formalisierung in der Prädikatenlogik 1. Stufe:

Beispiel: $\forall x \, \exists y P(x, f(x, y))$

Eine Interpretation besteht (unter anderem) aus *nur einem* Grundbereich ω und der Angabe einer konkreten Funktion $f_\omega : \omega \times \omega \to \omega$.

Wir möchten eine speziellere Interpretation verwenden:

$$f^* : \{0, 1, 2, 3\} \; x \; \{rot, gelb\} \to \{rot, gelb\}$$

Formalismus:
Verwendung von Sorten: z.B. A und B als Platzhalter für Grundbereiche
Funktionen mit Sorten: $f : A \; x \; B \to B$

Typisch: mehrere Sorten (vgl. Typen in Programmiersprachen)

$\Longrightarrow$ Sortenlogik:
Variable, Konstanten, Funktionen (Terme) und Prädikate mit Sorten
(in der Vorlesung nur Terme und Sorten)

Sorten und Terme

Schritt 1: Sorten und Strukturen

Definition 1

Sei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge von *Sorten* (nur Namen (Symbole) für Grundbereiche, keine konkreten Mengen) und seien $S_1, \ldots S_k, S \in \mathcal{S}$.
Dann bezeichnet $f : S_1 \text{ x } \ldots \text{ x } S_k \rightarrow S$ eine *Operation* (der Sorte S) zu $\mathcal{S}$. f ist das *Operatorsymbol* (vgl. Funktionssymbol in PL1); die Stelligkeit von f ist k.
Eine 0-stellige Operation $a : \ \rightarrow S$ ist eine *Konstante* der Sorte S.
Eine *Struktur* $\mathcal{F}$ ist eine endliche Menge von Operationen zu $\mathcal{S}$.

Beispiel für eine Struktur:

$$\mathcal{F} = \{ \begin{array}{l} + : A \text{ x } B \rightarrow B, \\ * : A \text{ x } B \rightarrow B, \\ - : A \rightarrow A, \\ a : \ \rightarrow B \end{array} \}$$

$+, *, -, a$ sind Operatorsymbole, a ist ein Konstantensymbol.

Sorten und Terme

Schritt 1: Terme

Definition 2 ((wohlgeformte) Terme)

Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ eine endliche Menge von *Sorten* und sei $\mathcal{F}$ eine Struktur zu $\mathcal{S}$.
Zu jedem S_j sei eine Mengen von Variablennamen V_j gegeben, $1 \leq j \leq n$.
Die Terme der Sorte S_k werden für $1 \leq k \leq n$ gleichzeitig induktiv definiert durch:

1. Jede Variable $v \in V_k$ ist ein Term der Sorte S_k.
2. Jeder 0-stellige Operator (Konstante) der Sorte S_k ist ein Term der Sorte S_k.
3. Für $1 \leq j \leq r$ sei t_j ein Term der Sorte S_{i_j} und $f : S_{i_1}\ x \ldots\ x\ S_{i_r} \rightarrow S_k$ eine Operation in $\mathcal{F}$. Dann ist $f(t_1, \ldots, t_r)$ ein Term der Sorte S_k.
4. Nur so gebildete Terme sind Terme der Sorte S_k.

Signatur

Definition 3 (Signatur)

Sei $\mathcal{S} = \{S_1, \dots S_n\}$ eine endliche Menge von Sorten und sei $\mathcal{F}$ eine Struktur zu $\mathcal{S}$. Dann nennen wir $\Sigma = (\{S_1, \dots, S_n\}, \mathcal{F}\ )$ eine *Signatur*.

Seien V_j Variablensymbole der Sorte S_j für $1 \leq j \leq n$, dann bezeichnet $T_\Sigma(V_1, \dots, V_n)$ die Menge der wohlgeformten Terme zu Σ mit Variablen in $V_1, \dots, V_n$.

Auf Basis einer Struktur kann man auch Terme bilden, die nicht korrekt gebildet sind, also Sortenrestriktionen nicht einhalten.

Beispiel:
Sei $\mathcal{F} = \{f : S_1 \to S_2, g : S_1 \to S_2\}$. Dann ist $f(g(x))$ kein für die Signatur $\Sigma = (\{S_1, S_2\}, \mathcal{F})$ korrekt gebildeter Term.

Termnotation

Definition 4 (Termnotation)

Ein n-stelliger Term mit dem Operatorsymbol f und den Termen $t_1, \ldots, t_n$ als Operanden wird notiert in

1. **Funktionsform**: $f(t_1, \ldots, t_n)$, wobei die t_i auch in Funktionsform sind.
2. **Präfixform**: $(f \;\; t_1 \cdots t_n)$, wobei die t_i auch in Präfixform sind.
3. **Postfixform**: $(t_1 \cdots t_n \;\; f)$, wobei die t_i auch in Postfixform sind.
4. **Infixform**: (nur für max. zweistellige Operatoren)
   $(t_1 \;\; f \;\; t_2)$ bzw. $(f \;\; t_1)$, wobei die t_i auch in Infixform sind.

Beispiele:

1. $+\,(*\,(x, 3), -\,(2, 3))$ Funktionsform
2. $(\,+\,(\,*\,x\;3)\;(\,-\,2\;3))$ Präfixform
3. $(\,(\,x\;3\;*)\;(\,2\;3\;-)\;+)$ Postfixform
4. $(\,(\,x \;\; * \;\; 3) \;\; + \;\; (\,2 \;\; - \;\; 3))$ Infixform

Termnotation

Beispiele:

$x + y$ Infixform

$+ \ x \ y$ Präfixform

$x \ y \ +$ Postfixform

$+(x, y)$ Funktionsform

$x \wedge y$ Infixform

$\wedge \ x \ y$ Präfixform

$x \ y \ \wedge$ Postfixform

$\wedge(x, y)$ Funktionsform

$f \ x \ y \ z$ Präfixform

$x \ y \ z \ f$ Postfixform

$f(x, y, z)$ Funktionsform

Termnotation

Beispiele:

$* \; x \; (+ \; y \; z)$ Präfixform

$x \; (y \; z \; +) \; *$ Postfixform

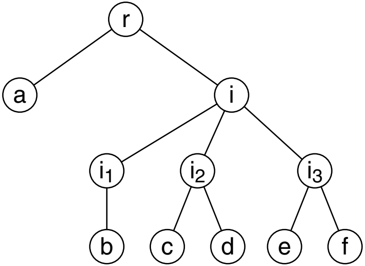
$*(x, +(y, z))$ Funktionsform

$x \; * \; (\; y \; + \; z \;)$ Infixform

In allen Notationen is die Einsparung von Klammern nur bei festgelegten Einsparungsregeln möglich: z.B. Operatorpräzedenz (Punktrechnung vor Strichrechnung) oder Linksklammerung (bei assoziativen Operatoren).

Bäume als spezielle Graphen

Beispiel:



r ist die Wurzel des Baumes.

i_1, i_2 und i_3 sind die Nachfolger des Knotens i.

Jeder Knoten hat nur endlich viele oder keinen Nachfolger.

Knoten ohne Nachfolger werden Blätter genannt.

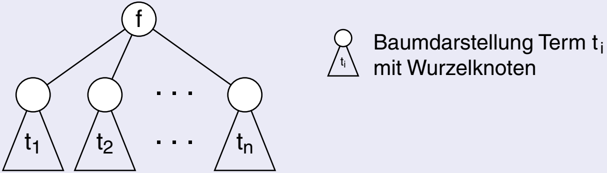
Die inneren Knoten sind alle Knoten außer den Blättern.

Terme und Baumdarstellung

Definition 5 (Baumdarstellung)

Die Baumdarstellung von Termen wird induktiv definiert:

1. Ist der Term eine Variable x, dann besteht der Baum nur aus einem Knoten mit Namen x: x
2. Ist der Term eine Konstante a, dann besteht der Baum nur aus einem Knoten mit Namen a: a
3. Ein n-stelliger Term $f(t_1, \dots, t_n)$ mit dem Operatorsymbol f und den Untertermen $t_1, \dots, t_n$ wird als Baum dargestellt durch

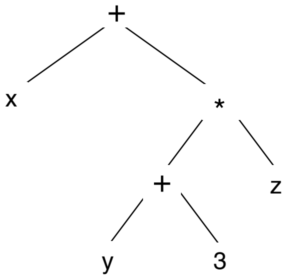


Achtung: Die Nachfolger eines Knotens werden von links nach rechts gelesen.

Terme und Baumdarstellung

Beispiel:

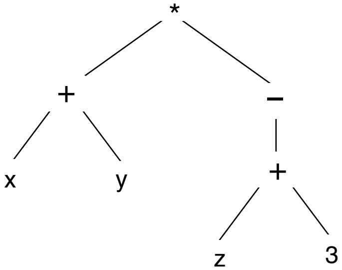
Der nachfolgende Baum repräsentiert den Term
Funktionsform $+(x, *(+(y, 3), z))$



Terme und Baumdarstellung

Beispiel:

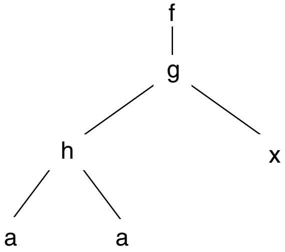
Der nachfolgende Baum repräsentiert den Term
Term: $(x + y) * -(z + 3)$
Funktionsform $*((+(x, y)), -(+(z, 3)))$



Terme und Baumdarstellung

Beispiel:

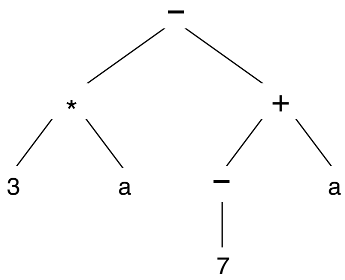
Der nachfolgende Baum repräsentiert den (in Funktionsform angegebenen) Term $f(g(h(a, a), x))$.



Termnotation und Baumdarstellung

Beispiel:

Der nachfolgende Baum repräsentiert den Term $(3 * a) - (-7 + a)$ (in Infixdarstellung).



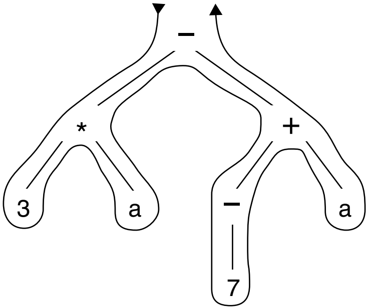
Der Baum repräsentiert die eindeutige Struktur des Terms.

Termnotation und Baumdarstellung

Beispiel: (Fortsetzung)

Wie können die möglichen Termformen an dem Baum abgelesen werden?

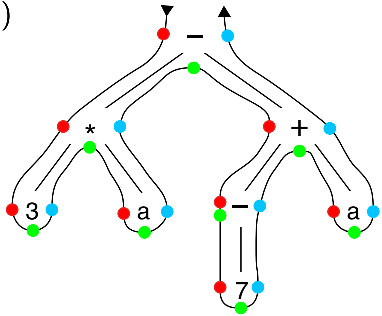
Führe einen Durchlauf durch den Baum durch (Tiefensuche-Durchlauf)



Gebe unter festgelegten Bedingungen die Knotensymbole aus!

Termnotation und Baumdarstellung

Beispiel: (Fortsetzung)



Aus einem Durchlauf des Baumes in Pfeilrichtung erzeugt man eine

Präfixform: Ausgabe Symbol beim ersten Besuch eines Knotens,
Postfixform: Ausgabe Symbol beim letzten Besuch eines Knotens,
Infixform: Ausgabe Symbol beim zweiten Besuch eines Knotens.

Für Knoten mit nur einem Nachfolger fallen erster und zweiter Besuch zusammen, für Blätter zählt das Erreichen als erster, zweiter und letzter Besuch. Bei inneren Knoten werden vor dem ersten und nach dem letzten Besuch des Knotens die entsprechenden Klammern ausgegeben.