Exkurs $\mathcal{O}$-Kalkül

Definition 1 ($\mathcal{O}$-Kalkül)

Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(g)$ die folgende Menge von Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(g) \quad = \quad & \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{ es existieren Konstanten } c > 0, n_0 > 0, \\ & \quad \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|\} \end{aligned}$$

Exkurs $\mathcal{O}$-Kalkül

Definition 1 ($\mathcal{O}$-Kalkül)

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(g)$ die folgende Menge von Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(g) \quad = \quad & \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ es existieren Konstanten } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|\} \end{aligned}$$

- $\mathcal{O}(g)$ formalisiert: Die Funktion f wächst nicht schneller als g (abgesehen von einem endlichen Anfangsstück und einem konstanten Faktor für g).

Exkurs $\mathcal{O}$-Kalkül

Definition 1 ($\mathcal{O}$-Kalkül)

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(g)$ die folgende Menge von Funktionen

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(g) \quad = \quad & \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \text{ es existieren Konstanten } c > 0, n_0 > 0, \\ & \text{so dass für alle } n \geq n_0 \text{ gilt: } |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|\}\end{aligned}$$

- $\mathcal{O}(g)$ formalisiert: Die Funktion f wächst nicht schneller als g (abgesehen von einem endlichen Anfangsstück und einem konstanten Faktor für g).
- Statt $f \in \mathcal{O}(g)$ findet man in der Literatur auch häufig $f = \mathcal{O}(g)$.

Exkurs $\mathcal{O}$-Kalkül

Typische Verwendung:

Notation	**Bedeutung**	**Anschauliche Erklärung**
$f \in \mathcal{O}(1)$	f ist beschränkt	f überschreitet einen konstanten Wert nicht (unabhängig vom Wert des Arguments).
$f \in \mathcal{O}(log\ n)$	f hat höchstens logarithmisches Wachstum	f wächst höchstens um einen konstanten Betrag, wenn sich das Argument verdoppelt.
$f \in \mathcal{O}(n)$	f hat höchstens lineares Wachstum	f wächst höchstens auf das Doppelte, wenn sich das Argument verdoppelt.

Exkurs $\mathcal{O}$-Kalkül

Typische Verwendung:

Notation	Bedeutung	Anschauliche Erklärung
$f \in \mathcal{O}(n^2)$	f hat höchstens quadratisches Wachstum	f wächst höchstens auf das Vierfache, wenn sich das Argument verdoppelt.
$f \in \mathcal{O}(2^n)$	f hat höchstens exponentielles Wachstum	f höchstens auf das Doppelte, wenn sich das Argument um eins erhöht
$f \in \mathcal{O}(n!)$	f hat höchstens faktorielles Wachstum	f wächst höchstens um das n-fache, wenn sich das Argument um eins von $n-1$ auf n erhöht.