Elementare Beweistechniken

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. Teil 2: Normalformen und Grenzen der Prädikatenlogik 1. Stufe
3. Teil 3: Modellierung und Beweise
4. **Teil 4: Substitution, Unifikation und Resolution**

Substitution

Unter einer *Substitution* $[x/t]$ verstehen wir die simultane Ersetzung aller Vorkommen der Variablen x durch einen Term t. Dieser Ersetzungsvorgang wird induktiv für Terme und Formeln definiert durch:

(1) $x[x/t] = t$ und für eine Individuenvariable $y \neq x$ ist $y[x/t] = y$.

(2) Für eine Individuenkonstante a ist $a[x/t] = a$.

(3) Für eine n-stellige Funktion f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist
$f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.

Substitution

Unter einer *Substitution* $[x/t]$ verstehen wir die simultane Ersetzung aller Vorkommen der Variablen x durch einen Term t. Dieser Ersetzungsvorgang wird induktiv für Terme und Formeln definiert durch:

(1) $x[x/t] = t$ und für eine Individuenvariable $y \neq x$ ist $y[x/t] = y$.

(2) Für eine Individuenkonstante a ist $a[x/t] = a$.

(3) Für eine n-stellige Funktion f und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $f(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.

(4) Für ein n-stelliges Prädikat P und Terme $t_1, \ldots, t_n$ ist $P(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = P(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$.

(5) Ist α eine Formel und ist $\alpha[x/t]$ definiert, so ist $(\neg\alpha)[x/t] = \neg\alpha[x/t]$.

(6) Sind α und β Formeln und sind $\alpha[x/t]$ und $\beta[x/t]$ definiert, so ist $(\alpha \vee \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \vee \beta[x/t]$ und $(\alpha \wedge \beta)[x/t] = \alpha[x/t] \wedge \beta[x/t]$.

(7) Für eine Formel α und eine Variable y gilt:
   (a) Gilt $x \notin \mathit{freevars}(\alpha)$, so ist $(\exists y\alpha)[x/t] = \exists y\alpha$ und $(\forall y\alpha)[x/t] = \forall y\alpha$.
   (b) Gilt $x \in \mathit{freevars}(\alpha)$, $y \notin \mathit{vars}(t)$ und ist $\alpha[x/t]$ definiert, so ist $(\exists y\alpha)[x/t] = \exists y\alpha[x/t]$ und $(\forall y\alpha)[x/t] = \forall y\alpha[x/t]$.

Substitution

Beispiele:

1. $f(x, x, a, y)[x/g(z)] = f(g(z), g(z), a, y)$
2. $f(x)[x/f(x)] = f(f(x))$
3. $f(a, g(y))[a/z]$ oder $f(a, g(y))[g(y)/z]$

   Unzulässige Substitutionen: Nur Variable dürfen ersetzt werden.
4. $P(x) \vee S(x, y)[x/f(g(z)] = P(f(g(z))) \vee S(f(g(z), y)$
5. $\forall x P(x)[x/y] = \forall x P(x)$
6. $\exists x P(x, y)[y/b] = \exists x P(x, b)$
7. $\exists x P(x, y)[y/g(x)]$ undefiniert

Substitution

Definition 1 (Substitution)

Für paarweise verschiedene Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bezeichnen wir mit $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ die Substitution, die simultan alle passenden Vorkommen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ durch die Terme $t_1, \ldots, t_n$ ersetzt entsprechend der Vorgaben auf der vorletzten Folie.

Eine Ersetzungsliste $[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n]$ darf nicht mit einer Substitution $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ verwechselt werden.

Eine Ersetzungsliste $[x_1/t_1] \ldots [x_n/t_n]$ beschreibt die Ausführung der Einzelsubstitutionen von links nach rechts hintereinander in genau dieser Reihenfolge.

Substitution

Beispiele:

$$f(x,y,z)[x/g(a),y/h(x),z/b] \quad = \quad f(g(a),h(x),b)$$

$$P(x,f(x),z)[x/f(x),z/x] \quad = \quad P(f(x),f(f(x)),x)$$

$$Q(x,y,z)[x/y,y/z,z/x] \quad = \quad Q(y,z,x)$$

$$\begin{aligned}[x/y][y/z][z/a] &= [x/z,y/z][z/a] \\ &= [x/a,y/a,z/a]\end{aligned}$$

Unifikation

Satz 2

Sei x *eine freie Variable der prädikatenlogischen Formel* α *und seien weiter* $x_1, \ldots, x_n$ *die Variablen des Terms* t. *Wenn die Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *in* α *nicht vorkommen, dann gilt für die Substitution* $[x/t]$*:*

$$\forall x \alpha \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \alpha[x/t]$$

Satz 3

Sei α eine quantorfreie prädikatenlogische Formel mit Variablen $x_1, \dots x_n$ sowie σ eine Substitution. Seien $y_1, \dots, y_m$ die Variablen in $\alpha\sigma$, dann gilt:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \alpha \models \forall y_1 \dots \forall y_n (\alpha\sigma)$$

Beispiel:

$\alpha = (P(x_1, g(x_2)) \vee \neg S(a, x_3, x_2))$ und $\sigma = [x_1/f(y_1), x_2/b, x_3/y_2]$

$\alpha\sigma = (P(f(y_1), g(b)) \vee \neg S(a, y_2, b))$

$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \ \alpha \models \forall y_1 \forall y_2 \ (P(f(y_1), g(b)) \vee \neg S(a, y_2, b))$

Unifikation

Definition 4 (Unifikator)

Seien α_1 und α_2 prädikatenlogische Formeln. Eine Substitution $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ heißt *Unifikator* von α_1 und α_2, falls gilt $\alpha_1[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \alpha_2[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$.
α_1 und α_2 heißen dann *unifizierbar*.

Beispiele:

$\alpha_1 = P(x) \vee \neg S(x, y, a)$ und $\alpha_2 = P(z) \vee \neg S(x_1, b, u)$

für $\sigma = [x/z, x_1/z, y/b, u/a]$ gilt

$$\alpha_1\sigma = \alpha_2\sigma = P(z) \vee \neg S(z, b, a)$$

Unifikation

Definition 4 (Unifikator)

Seien α_1 und α_2 prädikatenlogische Formeln. Eine Substitution $[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ heißt *Unifikator* von α_1 und α_2, falls gilt $\alpha_1[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n] = \alpha_2[x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$.
α_1 und α_2 heißen dann *unifizierbar*.

Beispiel:

$\alpha_1 = P(x) \vee \neg S(x, a, a)$ und $\alpha_2 = P(z) \vee \neg S(x_1, b, u)$

Es gibt keinen Unifikator, da a und b Konstantensymbole sind.

Beispiel:

$R(f(x))$ und $R(g(y))$ sind nicht unifizierbar (verschiedene Funktionssymbole).

Unifikation

Definition 5 (Allgemeinster Unifikator)

Ein Unifikator σ der prädikatenlogischen Formeln α_1 und α_2 heißt *allgemeinster Unifikator (most general unifier, mgu)* von α_1 und α_2, wenn es zu jedem anderen Unifikator τ von α_1 und α_2 eine Substitution τ' existiert, so dass gilt $\sigma \circ \tau' = \tau$.

$\sigma \circ \tau'$ bezeichnet die Hintereinanderausführung der beiden Substitutionen σ und τ' (erst σ anwenden, dann τ').

Für $\sigma = [y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m]$ und $\tau' = [x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n]$ gilt dann,

$$\begin{aligned}\sigma \circ \tau' &= [x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n][y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m] \\ &= [x_1/(t_1[y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m]), \ldots, x_n/(t_n[y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m]), y_1/s_1, \ldots, y_m/s_m]\end{aligned}$$

Allgemeinster Unifikator

Suche nach allgemeinsten Unifikatoren:

Sind $P(t_1, \ldots, t_n)$ und $P(t'_1, \ldots, t'_n)$ zwei verschiedene Primformeln, so wird das erste Paar *korrespondierender, verschiedener Terme* (s, s') von $P(t_1, \ldots, t_n)$ und $P(t'_1, \ldots, t'_n)$ dadurch bestimmt, dass man in der Argumentliste von P von links nach rechts das erste Termpaar sucht, das in beiden Primformeln verschieden ist. Dabei werden auch die Argumentlisten der vorkommenden Funktionen in gleicher Weise von links nach rechts durchsucht.

Beispiele:
1. $P(a, x)$ und $P(x', y')$: Termpaar (a, x')
2. $P(a, x)$ und $P(a, b)$: Termpaar (x, b),
3. $P(a, f(x, b))$ und $P(a, f(b, x))$: Termpaar (x, b)
4. $P(a, f(g(x), y))$ und $P(a, f(h(z), u))$: Termpaar $(g(x), h(z))$.

Unifikation

Unifikationsverfahren nach Robinson:

Seien $P(t_1, \ldots, t_n)$ und $P(t'_1, \ldots, t'_n)$ zwei Primformeln.

1. Setze $\sigma = []$ (leere Substitution) und $\alpha_1 = P(t_1, \ldots, t_n)$, sowie $\alpha_2 = P(t'_1, \ldots, t'_n)$.
2. Falls α_1 und α_2 zeichenweise gleich sind, ist σ der allgemeinste Unifikator.
3. Bestimme in α_1 und α_2 das erste Paar korrespondierender, verschiedener Terme (s, s').
    1. Falls s eine Variable ist und s nicht in s' vorkommt, setze $\sigma = \sigma \circ [s/s']$ und $\alpha_1 := \alpha_1[s/s']$, sowie $\alpha_2 := \alpha_2[s/s']$. Gehe zu 2.
    2. Falls s' eine Variable ist und s' nicht in s vorkommt, setze $\sigma = \sigma \circ [s'/s]$ und $\alpha_1 := \alpha_1[s'/s]$, sowie $\alpha_2 := \alpha_2[s'/s]$. Gehe zu 2.
    3. Sonst: Die Ausgangsformeln sind nicht unifizierbar.

Unifikations

Beispiel:

$\alpha_1 = P(x, x, f(y), a, x)$ und $\alpha_2 = P(x, z, f(w), z, u)$

1. $\sigma = []$, Paar korrespondierender, verschiedener Terme (x, z)
2. $\sigma = [x/z]$
   $\alpha_1 := \alpha_1[x/z] = P(z, z, f(y), a, z)$ und
   $\alpha_2 := \alpha_2[x/z] = P(z, z, f(w), z, u)$
3. $\sigma := [x/z][y/w]$ Termpaar (w, y)
   $\alpha_1 := \alpha_1[y/w] = P(z, z, f(w), a, z)$ und
   $\alpha_2 := \alpha_2[y/w] = P(z, z, f(w), z, u)$
4. $\sigma = [x/z][y/w][z/a]$ Termpaar (a, z)
   $\alpha_1 := \alpha_1[z/a] = P(a, a, f(w), a, a)$ und
   $\alpha_2 := \alpha_2[z/a] = P(a, a, f(w), a, u)$
5. $\sigma = [x/z][y/w][z/a][u/a]$ Termpaar (a, u)
   $\alpha_1 := \alpha_1[z/a] = P(a, a, f(w), a, a)$ und
   $\alpha_2 := \alpha_2[z/a] = P(a, a, f(w), a, a)$

Allgemeinster Unifikator ist $\sigma = [x/a, y/w, z/a, u/a]$

Unifikation

Beispiele:

1. $\alpha_1 = P(x, b)$ und $\alpha_2 = P(x, a)$
Es gibt keinen allgemeinsten Unifikator:
erstes Paar korrespondierender, verschiedener Terme ist (b, a), beide Terme sind Konstanten.

2. $\alpha_1 = P(f(x))$ und $\alpha_2 = P(g(x))$
Es gibt keinen allgemeinsten Unifikator:
erstes Paar korrespondierender, verschiedener Terme ist $(f(x), g(x))$, verschiedene Funktionssymbole.

3. $\alpha_1 = P(x)$ und $\alpha_2 = P(f(x))$
Es gibt keinen allgemeinsten Unifikator:
erstes Paar korrespondierender, verschiedener Terme ist $(x, f(x))$, x kommt in $f(x)$ vor.

4. $\alpha_1 = P(f(y))$ und $\alpha_2 = P(f(x))$
$\sigma = [y/x]$ ist ein allgemeinster Unifikator, $\sigma' = [x/y]$ ebenso.

Resolution

Voraussetzung:

Geschlossene Formel in Skolem Normalform mit Kern in KNF

$$\Phi = \forall x_1 \dots \forall x_n \; (\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)$$

1. α_i sind Klauseln für $1 \leq i \leq r$
2. α_i enthalten keine Quantoren für $1 \leq i \leq r$
3. Φ enthält keine freien Variablen

Ziel:

Kalkül (Beweisregeln), um zu entscheiden, ob Φ widerspruchsvoll ist,

analog zur aussagenlogischen Resolution.

Resolution

In der Prädikatenlogik benötigen wir eine stärkere Regel, um Literale zusammenziehen zu können. Betrachten wir beispielsweise die Klausel

$$\forall x \forall y (P(x, y) \lor P(y, x))$$

Als Spezialfall dieser Aussage erhalten wir die Klausel $\forall x \; P(x, x)$. Wenn also zwei Literale einer Klausel α mit einer Substitution σ unifiziert werden können, dann enthält $\alpha\sigma$ zwei gleiche Literale, die mit Hilfe der Idempotenzregel zu einem Literal zusammengezogen werden können. Für das Beispiel bedeutet dies mit $\sigma = [y/x]$:

$$\forall x \forall y (P(x, y) \lor P(y, x)) \models \forall x (P(x, x) \lor P(x, x)) \models \forall x P(x, x)$$

Notation : Klauseln $\{L_1 \lor \ldots \lor L_r\}$ in Mengenschreibweise $\{L_1, \ldots, L_r\}$

Faktorisierung

Definition 6

Binäre Faktorisierungsregel

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_k, L, L'\}}{\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, L\sigma\}}(\text{Fakt})$$

mit σ allgemeinster Unifikator von L und L'.
Die so gewonnene neue Klausel heißt *Faktor* der Ausgangsklausel.

Faktorisierung

Beispiel:

$$\frac{\{P(x), \neg R(x,z), P(y), P(a)\}}{\{P(y), \neg R(y,z), P(a)\}}(\text{Fakt})$$

mit allgemeinstem Unifikator $\sigma = [x/y]$ für $P(x)$ und $P(y)$

$$\frac{\{P(y), \neg R(y,z), P(a)\}}{\{P(a), \neg R(a,z)\}}(\text{Fakt})$$

mit allgemeinstem Unifikator $\sigma = [y/a]$ für $P(y)$ und $P(a)$

Es gilt:

$$\forall x \forall y \forall z\ (P(x) \vee \neg R(x,z) \vee P(y) \vee P(a)) \models \forall z\ (P(a) \vee \neg R(a,z))$$

Resolution

Konjunktion von allquantifizierten Klauseln.

$$\alpha = \forall x \forall z(\neg P(a,x) \vee \neg P(x,z)) \wedge \forall x \forall y(P(a,b) \vee P(x,y) \vee P(y,x))$$

Umbennenung

$$\alpha \approx \alpha \wedge \forall x \forall y(\neg P(a,x) \vee \neg P(x,y)) \wedge \forall u \forall v(P(a,b) \vee P(u,v) \vee P(v,u))$$

Die beiden variablenfremden Klauseln können wir unter einem gemeinsamen Präfix zusammenfassen durch die Quantifizierungsregeln.

$$\alpha \approx \alpha \wedge \forall x \forall y \forall u \forall v((\neg P(a,x) \vee \neg P(x,y)) \wedge (P(a,b) \vee P(u,v) \vee P(v,u)))$$

Auswahl von Literalen für die Resolution

Wähle $\neg P(a,x)$ aus Klausel 1 und $P(u,v)$ aus Klausel 2.

Resolution

Unifikation

$$P(a,x), P(u,v) \text{ unifizieren } \Longrightarrow \sigma = [u/a, v/x] \text{ allgemeinster Unifikator}$$

Falls ein allgemeinster Unifikator σ existiert, bilden wir die beiden entsprechend spezialisierten Klauseln.

$$\alpha \approx \alpha \wedge \forall x \forall y((\neg P(a,x) \vee \neg P(x,y)) \wedge (P(a,b) \vee P(a,x) \vee P(x,a)))$$

Die Anwendung der Resolutionsregel auf die spezialisierten Klauseln entspricht dann einem Kettenschluss.

$$\alpha \approx \alpha \wedge \forall x \forall y((P(a,x) \rightarrow \neg P(x,y)) \wedge ((\neg(P(a,b) \vee P(x,a)) \rightarrow P(a,x)))$$

Die Resolvente ist insgesamt eine Folgerung der Ausgangsformel.

$$\alpha \approx \alpha \wedge \forall x \forall y(\neg P(x,y) \vee P(a,b) \vee P(x,a))$$

Resolution

Auch diese Schritte werden zu einer einzigen Regel, der sogenannten *Resolutionsregel*, zusammengefasst, die zwei Klauseln einer Formel über ein Literalpaar resolviert.

Definition 7

Binäre Resolutionsregel

$$\frac{\{L_1, \ldots, L_k, L\} \qquad \{K_1, \ldots, K_r, \neg L'\}}{\{L_1\sigma, \ldots, L_k\sigma, K_1\sigma, \ldots, K_r\sigma\}}\text{(Res)}$$

mit σ allgemeinster Unifikator von L und L'.

Beachte, dass durch die binäre Resolutionsregel genau zwei Literale in der Resolvente eliminiert wurden.

Resolution

Beispiele:

$$\cfrac{\dfrac{\{\neg P(a,x), \neg P(x,z)\}}{\{\neg P(a,a)\}}\ [x/a, z/a] \qquad \dfrac{\{P(a,b), P(x,y), P(y,x)\}}{\{P(a,b), P(x,x)\}}\ [y/x]}{\{P(a,b)\}}\ [x/a]$$

$$\frac{\{\neg P(x), P(f(x))\} \qquad \{\neg P(y), P(f(y))\}}{\{\neg P(x), P(f(f(x)))\}}\ [y/f(x)]$$

Resolution

Binäre Faktorisierung:

1. Wähle eine Klausel κ aus.
2. Wähle in der Klausel κ zwei Literale L und L' mit gleichem Vorzeichen (negiert oder nicht negiert) und dem gleichen Prädikat.
3. Bestimme den allgemeinsten Unifikator σ für L und L'.
4. Bestimme den Faktor:
   Bilde $\kappa\sigma$ und eliminiere darin **ein** Vorkommen von $L\sigma$.

Resolution

Binäre Resolution:

1. Wähle zwei Klauseln κ_1 und κ_2 aus.
2. Benenne die Variablen so um, dass keine Variable in beiden Klauseln vorkommt. Die Klauseln sind dann variablenfremd.
3. Wähle in der Klausel κ_1 ein Literal L und in κ_2 ein komplementäres Literal L' (d.h. L negiert und L' positiv oder umgekehrt), wobei L und L' Literale über dem gleichen Prädikat sind.
4. Bestimme den allgemeinsten Unifikator σ für L und L'.
5. Bestimme die Resolvente:
   Zusammenfassung der Literale von $\kappa_1\sigma$ und von $\kappa_2\sigma$ ohne die von L un L' abgeleiteten Instanzen $L\sigma$ und von $L'\sigma$.

Resolution

Satz 8

Sei α eine geschlossene prädikatenlogische Formel in Skolem Normalform mit Kern in KNF. Dann gilt:

$$\alpha \textit{ widerspruchsvoll genau dann, wenn } \alpha \mid\!\underline{\quad}_{\mathit{FAKT+RES}} \sqcup \textit{ gilt.}$$

Resolution

Sei k eine beliebige, aber feste natürliche Zahl:

- Die leere Klausel wurde nach höchstens k Resolutionsschritten (binäre Faktorisierung und binäre Resolution) hergeleitet.
  Dann ist α widerspruchsvoll.
- Nach höchstens k Resolutionen war keine neue Klausel mehr generierbar und die leere Klausel wurde nicht generiert. Dann ist α ist erfüllbar.
- Nach k Resolutionsschritten war die leere Klausel noch nicht generiert worden und die Bildung neuer Resolventen war noch nicht beendet.
  Dann ist offen, ob α erfüllbar ist.

Bemerkung:
Das Erfüllbarkeitsproblem für die Prädikatenlogik erster Stufe ist unentscheidbar.
(Nachweis z.B. durch Beschreibung des Halteproblems für Turingmaschinen, vgl. Vorlesung EBKfS)

Unit-Resolution

analog zur Aussagenlogik

Definition 9 (Unit-Resolutionsregel)

Unter der Unit-Resolutionsregel verstehen wir den Spezialfall der binären Resolutionsregel, bei dem eine der Elternklauseln nur aus einem Literal besteht:

$$\frac{\{L\} \qquad \{K_1, \ldots, K_r, \neg L'\}}{\{K_1\sigma, \ldots, K_r\sigma\}} \text{(Unit-Res)}$$

mit σ allgemeinster Unifikator von L und L'.

Beobachtung:
Die Unit-Resolution ist nicht widerlegungsvollständig (siehe Ausagenlogik).

$$\Phi = (P(a) \vee R(a)) \wedge (\neg P(a) \vee R(a)) \wedge (P(a) \vee \neg R(a)) \wedge (\neg P(a) \vee \neg R(a))$$

ist widerspruchvoll, aber es gilt nicht $\Phi \mathrel{\underset{\mathit{Unit\text{-}Res}}{\vdash}} \sqcup$.

Unit-Resolution

Beispiel:

Jeder Student hat einen Studentenausweis. Jeder Studentenausweis hat eine Matrikelnummer. Meier ist Student und Müller ist Student.

$$\beta = Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ \forall x((Stud(x) \to Ausweis(x)) \wedge (Ausweis(x) \to Matnr(x)))$$

logisch äquivalent zu

$$\alpha = \forall x(Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ (Stud(x) \to Ausweis(x)) \wedge (Ausweis(x) \to Matnr(x)))$$

Anfrage:
Hat Müller eine Matrikelnummer?
Folgt $Matnr(mueller)$ aus der Formel?
Gilt $\alpha \models Matnr(mueller)$?

Unit-Resolution

Beispiel (Fortsetzung):

$$\alpha = \forall x(Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ (Stud(x) \rightarrow Ausweis(x)) \wedge (Ausweis(x) \rightarrow Matnr(x)))$$

Gilt $\alpha \models Matnr(mueller)$?

$\alpha \models Matnr(mueller)$
gdw. $\alpha \wedge \neg Matnr(mueller)$ ist widerspruchsvoll
gdw. $\alpha \wedge \neg Matnr(mueller) \vdash_{\overline{FAKT+RES}} \sqcup$

Unit-Resolutionswiderlegung

$Stud(mueller), (\neg Stud(x) \vee Ausweis(x)) \vdash_{\overline{Unit\text{-}Res}} Ausweis(mueller)$,
$\sigma = [x/mueller]$
$Ausweis(mueller), (\neg Ausweis(x) \vee Matnr(x)) \vdash_{\overline{Unit\text{-}Res}} Matnr(mueller)$,
$\sigma = [x/mueller]$
$Matnr(mueller), \neg Matnr(mueller) \vdash_{\overline{Unit\text{-}Res}} \sqcup$

Folgerung - Resolution

Frage: Gilt $\alpha \models \beta$ für geschlossene Formeln α und β?

1. Bilde $\alpha \wedge \neg\beta$ (indirekt).
2. Transformiere $\alpha \wedge \neg\beta$ in eine erfüllbarkeits-äquivalente Skolem Normalform mit Kern in KNF; sei dies Φ.
3. Versuche $\Phi \mathrel{\underset{\mathit{FAKT+RES}}{\vdash\!\!\!\overline{}}} \sqcup$ zu zeigen.

Es gilt $\alpha \models \beta$, falls die leere Klausel herleitbar ist

Folgerung - Resolution

Beispiel:

Transformationsschritte

1. 1. $\forall x \forall y P(x, y, a) \models \exists y \forall x P(x, x, y)$
2. 2. $\forall x \forall y P(x, y, a) \wedge \neg(\exists y \forall x P(x, x, y))$
3. 3. $\forall x \forall y P(x, y, a) \wedge \forall y \exists x \neg P(x, x, y)$
4. 4. $\forall x \forall y P(x, y, a) \wedge \forall y_1 \exists x_1 \neg P(x_1, x_1, y_1)$
5. 5. $\forall y_1 \exists x_1 \forall x \forall y \; (P(x, y, a) \wedge \neg P(x_1, x_1, y_1)$
6. 6. $\forall y_1 \forall x \forall y \; (P(x, y, a) \wedge \neg P(f(y_1), f(y_1), y_1))$

   Es gibt eine Herleitung zur leeren Klausel, also gilt die Folgerung.
   (Der allgemeinste Unifikator ist $[x/f(a), y/f(a), y_1/a]$)