Modellierung und Beweise

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. Teil 2: Normalformen und Grenzen der Prädikatenlogik 1. Stufe
3. **Teil 3: Modellierung und Beweise**
4. Teil 4: Substitution, Unifikation und Resolution

Modellierung

Beispiel Regeln: Eigenschaften von Relationen

1. $\forall x\, R(x, x)$ reflexiv
2. $\forall x\, \neg R(x, x)$ irreflexiv
3. $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ symmetrisch
4. $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \land R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$ transitiv
5. $\forall x \forall y ((\neg(x = y)) \rightarrow (R(x, y) \leftrightarrow \neg R(y, x)))$ alternativ

Modellierung

Beispiel Konstanten

Jeder Student hat einen Studentenausweis. Jeder Studentenausweis hat eine Matrikelnummer. Meier ist Student und Müller ist Student.

$Stud(x)$: x ist Student.
$Ausweis(x)$: x hat einen Ausweis.
$Matnr(x)$: x hat eine Matrikelnummer.
$Stud(meier), Stud(mueller)$: den Konstanten Müller und Meier werden Konstantensymbole *meier* und *mueller* zugeordnet.

Formalisierung:

$$\begin{aligned}\Phi = {} & Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ & \forall x(Stud(x) \rightarrow Ausweis(x)) \wedge \forall y(Ausweis(y) \rightarrow Matnr(y))\end{aligned}$$

logisch äquivalent zu

$$\begin{aligned}\beta = {} & Stud(meier) \wedge Stud(mueller) \wedge \\ & \forall x((Stud(x) \rightarrow Ausweis(x)) \wedge (Ausweis(x) \rightarrow Matnr(x)))\end{aligned}$$

Modellierung

Beispiel Konstanten (Fortsetzung)
Jeder Student hat einen Studentenausweis. Jeder Studentenausweis hat eine Matrikelnummer. Meier ist Student und Müller ist Student.

$$\begin{aligned}\beta = {} & \mathit{Stud}(\mathit{meier}) \wedge \mathit{Stud}(\mathit{mueller}) \wedge \\ & \forall x((\mathit{Stud}(x) \rightarrow \mathit{Ausweis}(x)) \wedge (\mathit{Ausweis}(x) \rightarrow \mathit{Matnr}(x)))\end{aligned}$$

logisch äquivalent zu

$$\begin{aligned}\alpha = {} & \forall x(\mathit{Stud}(\mathit{meier}) \wedge \mathit{Stud}(\mathit{mueller}) \wedge \\ & (\mathit{Stud}(x) \rightarrow \mathit{Ausweis}(x)) \wedge (\mathit{Ausweis}(x) \rightarrow \mathit{Matnr}(x)))\end{aligned}$$

Anfrage:

Hat Müller eine Matrikelnummer?

Folgt $\mathit{Matnr}(\mathit{mueller})$ aus der Formel?

Gilt $\alpha \models \mathit{Matnr}(\mathit{mueller})$?

Modellierung

Beispiel Fakten und Regeln: Verwandtschaft

Eva ist die Mutter von Paul und Maria. Egon ist der Vater von Vera. Hans ist der Vater von Maria und Paul.

x und y sind die Eltern von z, falls x der Vater von z und y ist die Mutter von z.

x und y sind Geschwister, falls beide dieselben Eltern haben.

Formalisierung:

1. Mutterbeziehung: $Mutter(eva, paul) \wedge Mutter(eva, maria)$
2. Vaterbeziehung: $Vater(egon, vera) \wedge$
   $Vater(hans, paul) \wedge Vater(hans, maria)$

Axiomatisierung:

a) Eltern

$$\forall x \forall y \forall z((Vater(x, z) \wedge Mutter(y, z)) \rightarrow Eltern(x, y, z))$$

b) Geschwister

$$\forall x \forall y \forall u \forall v((Eltern(u, v, x) \wedge Eltern(u, v, y)) \rightarrow Geschwister(x, y))$$

Modellierung

1. **Allaussagen:**
   Für alle Objekte mit einer Eigenschaft E gilt, dass ...
   Verwende Implikation
   $$\forall x\,(E(x) \to \ldots)$$
   Beispiel: Für alle natürliche Zahlen gilt, dass sie größer als Null sind.
   $$\forall x(\mathit{NatuerlicheZahl}(x) \to \mathit{IstGroesserAlsNull}(x))$$

Modellierung

1. **Allaussagen:**
   Für alle Objekte mit einer Eigenschaft E gilt, dass ...
   Verwende Implikation
   $$\forall x\,(E(x) \to \ldots)$$
   Beispiel: Für alle natürliche Zahlen gilt, dass sie größer als Null sind.
   $$\forall x(\mathit{NatuerlicheZahl}(x) \to \mathit{IstGroesserAlsNull}(x))$$
2. **Existenzaussagen:**
   Es gibt ein Objekt x mit der Eigenschaft E, das ..
   Verwende Konjunktion
   $$\exists x\,(E(x) \land \ldots)$$
   Beispiel: Es gibt eine natürliche Zahl, die größer als 5 ist.
   $$\exists x(\mathit{Natuerliche} - \mathit{Zahl}(x) \land \mathit{IstGroesserAlsFuenf}(x))$$

Modellierung

Beispiel: Barbierproblem

1. Jeder Barbier rasiert alle Personen, die sich nicht selbst rasieren.

$B(x)$: x ist Barbier.
$R(x, y)$: x rasiert y.

Formalisiert:

$$\forall x(B(x) \to \forall y(\neg R(y, y) \to R(x, y)))$$

2. Kein Barbier rasiert jemanden, der sich selbst rasiert.

Formalisiert:

$$\neg \exists x(B(x) \wedge \exists y(R(x, y) \wedge R(y, y)))$$

Frage: Gibt es einen Barbier?

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

1. An jedem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jedem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \exists y(Accident(y) \land \forall z(Person(z) \rightarrow Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

1. An jedem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jedem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge \forall z(Person(z) \rightarrow Happens(x, y, z))))$$

2. An jedem Freitag den 13. gibt es irgendein Unglück, das irgend jemandem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge \exists z(Person(z) \wedge Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

1. An jedem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jedem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge \forall z(Person(z) \rightarrow Happens(x, y, z))))$$

2. An jedem Freitag den 13. gibt es irgendein Unglück, das irgend jemandem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge \exists z(Person(z) \wedge Happens(x, y, z))))$$

3. An jedem Freitag den 13. gibt es für jeden ein Unglück, das ihm zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \forall z(Person(z) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

4. An jedem Freitag den 13. gibt es kein Unglück, das niemandem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \neg\exists y(Accident(y) \wedge \neg\exists z(Person(x) \wedge Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

4. An jedem Freitag den 13. gibt es kein Unglück, das niemandem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \neg\exists y(Accident(y) \wedge \neg\exists z(Person(x) \wedge Happens(x, y, z))))$$

5. An keinem Freitag den 13 gibt es für jeden ein Unglück, das ihm zustößt.

$$\neg\exists x(Friday13(x) \wedge \forall z(Person(z) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

4. An jedem Freitag den 13. gibt es kein Unglück, das niemandem zustößt.

$$\forall x(Friday13(x) \rightarrow \neg\exists y(Accident(y) \wedge \neg\exists z(Person(x) \wedge Happens(x, y, z))))$$

5. An keinem Freitag den 13 gibt es für jeden ein Unglück, das ihm zustößt.

$$\neg\exists x(Friday13(x) \wedge \forall z(Person(z) \rightarrow \exists y(Accident(y) \wedge Happens(x, y, z))))$$

6. An irgendeinem Freitag den 13. gibt es ein Unglück, das jemandem zustößt.

$$\exists x(Friday13(x) \wedge \exists y(Accident(y) \wedge \exists z(Person(z) \wedge Happens(x, y, z))))$$

Modellierung

Beispiel: Verflixter Freitag

$Friday13(x)$: x ist ein Freitag der 13.
$Accident(y)$: y ist ein Unglück
$Person(z)$: z ist eine Person
$Happens(x, y, z)$: am Tag x stößt der Person z ein Unglück y zu.

7. An keinem Freitag den 13. stoßen jemandem alle Unglücke zu.

$$\neg\exists x(Friday13(x) \wedge \exists z(Person(z) \wedge \forall y(Accident(y) \rightarrow Happens(x, y, z))))$$

Gleichheit

Zu jedem der zu betrachtenden Grundbereiche gibt es eine festgelegte Gleichheitsrelation"$=$", die entscheidet, ob zwei Elemente identisch sind.

Wir benutzen in Formeln ein Prädikat $=$, das immer als diese Gleichheit über dem Grundbereich interpretiert wird.

Beispiel: Kardinalität von Mengen

Existenz von mindestens drei (paarweise verschiedenen) Elementen:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg x_1 = x_3 \wedge \neg x_2 = x_3)$$

Grundbereich: Teilmenge von $\mathbb{N}$, Gleichheit über natürlichen Zahlen $=$.

Interpretation 1:
$\mathfrak{I}$ benutzt den Grundbereich $\{1, 6, 7\}$. Dann ist die Formel wahr für $\mathfrak{I}$.

Interpretation 2:
$\mathfrak{I}$ benutzt den Grundbereich $\{2, 3\}$. Dann ist die Formel falsch für $\mathfrak{I}$.

Gleichheit

1. Mindestens *n* verschiedene Elemente:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg x_1 = x_2 \land \ldots \land \neg x_{n-1} = x_n)$$

auch geschrieben als

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i = x_j)$$

2. Maximal *n* verschiedene Elemente:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y (y = x_1 \lor \ldots \lor y = x_n)$$

auch geschrieben als

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y (\bigvee_{1 \leq i \leq n} y = x_i)$$

Gleichheit

Beispiel: Bijektive Funktionen

Beachte: Einstellige Relationen definieren Mengen.
Für eine Interpretation bezeichne
$P_\omega := \{x_\omega \in \omega : P_\omega(x_\omega) \text{ gilt}\}$ und $R_\omega := \{x_\omega \in \omega : R_\omega(x_\omega) \text{ gilt}\}$
Bijektive Funktion von P_ω nach R_ω.

Einschränkung Bildbereich:

$$\forall x \forall y ((P(x) \wedge f(x) = y) \rightarrow R(y))$$

Surjektivität:

$$\forall y (R(y) \rightarrow \exists x (P(x) \wedge f(x) = y))$$

Injektivität:

$$\forall x \forall y \forall z ((P(x) \wedge P(y) \wedge R(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z) \rightarrow x = y)$$

Beweise

Erinnerung: $\alpha \models \beta$ gdw. $\models (\alpha \to \beta)$ (d.h. $\alpha \to \beta$ Tautologie)

α wird Voraussetzung oder Prämisse genannt.
β ist die Konklusion oder hier Behauptung.

Allgemein übliche Formulierung:

Satz: Gegeben sei α. Dann folgt β.

Satz: Voraussetzung α
Behauptung β

Beweis:

1. Überprüfung der Interpretationen
2. Verwendung von Beweisregeln
    1. $\sigma, \sigma \to \delta$ (Modus Ponens)
    2. $\forall x\, \sigma \models \exists x\, \sigma$ Abschwächung
    3. ...
3. Verwendung weiterer Beweisstrategien und Beweistechniken (z.B. Induktionsbeweis)

Satz- und Beweisform

Beispiel: Satzform

Satz (Pythagoras)
Voraussetzung: Gegeben sei ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck, die Länge der Hypotenuse sei c und die Längen der anderen Seiten seien a und b.
Behauptung: Dann gilt $c^2 = a^2 + b^2$.

Allgemeine Satz- und Beweisform

Satz (Name des Satzes)

Voraussetzung: P
Behauptung: Q

Beweis (kurzer Hinweis auf die Idee, Methode, Struktur des Beweises)

Ausgangspunkt: P ist gegeben, P liegt vor.
Nachweis von Q, eigentlicher Beweis.

q.e.d

Indirekter Beweis

Beispiel:

Zu zeigen: $P \models Q$.

$P \models Q$ gilt gdw. $P \wedge \neg Q$ widerspruchsvoll ist.

Schema für einen indirekten Beweis

Satz (Name des Satzes)

Voraussetzung: P
Behauptung: Q

Beweis (indirekter Beweis, Beweis durch Widerspruch)

Ausgangspunkt: P ist gegeben.

Annahme: Nimm das Gegenteil von Q an, also $\neg Q$.

Führe $\neg Q$ zusammen mit der Voraussetzung P zu einem **Widerspruch**.

q.e.d

Indirekter Beweis

Beispiel:

Satz (Wetter)
Voraussetzung: R und $R \to N$
Behauptung: N.

Beweis (durch Widerspruch)

Ausgangspunkt: Es gilt R und es gilt $R \to N$.

Annahme: Es gilt nicht N, also $\neg N$ gilt.

Aus $\neg N$ und $R \to N$ folgt $\neg R$. Das ist ein **Widerspruch** zur Voraussetzung, dass R gilt. **q.e.d**

Satzform Konjunktion

Eine Konjunktion $Q \wedge R$ gilt, falls sowohl Q als auch R gelten. Also müssen beide Aussagen Q und R gezeigt werden. Dies geschieht nacheinander.

Schema für Konjunktion

Satz
Voraussetzung: P
Behauptung: $Q \wedge R$

Beweis
Ausgangspunkt: P ist gegeben.

Teil 1: Zeige Q.
Teil 2: Zeige R.

q.e.d

Satzform Disjunktion

Eine Disjunktion $Q \vee R$ gilt, falls Aussage Q oder Aussage R gilt.
Mindestens eine Aussage, Q oder R muss gelten.

Schema für Disjunktion

Satz
Voraussetzung: P
Behauptung: $Q \vee R$

Beweis
Ausgangspunkt: P ist gegeben.

Alternative 1: Nimm an, Q gilt nicht. Zeige R.
Alternative 2: Nimm an, R gilt nicht. Zeige Q.
Alternative 3: (indirekter Beweis)
Annahme: $\neg(Q \vee R)$ gilt, also $\neg P$ und $\neg Q$ gelten.
Zeige: Ausgangspunkt und Annahme führen zu einem Widerspruch.

q.e.d

Satzform Implikation

Eine Implikation $(Q \to R)$ ist äquivalent zu $\neg Q \vee R$. Der Beweis wird wie in Alternative 1 für Disjunktionen geführt. Wir nehmen Q an und zeigen R.

Beispiel: Ketten von Implikationen

Satz
Voraussetzung: $P, (P \to T), (T \to R)$.
Behauptung: R.

Beweis
Alternative 1:
Schritt 1: Zeige: Aus P und $P \to T$ folgt T.
Schritt 2: Zeige: Aus T und $T \to R$ folgt R.

Alternative 2:
Schritt 1: Zeige: Aus $P \to T$ und $T \to R$ folgt $P \to R$.
Schritt 2: Zeige: Aus P und $P \to R$ folgt R.

q.e.d

Beweisstrukturen

Satzform: Komplexe Implikation $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$

Es gilt:

$$\begin{aligned}(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q &\approx \neg(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \vee Q \\ &\approx (\neg P_1 \wedge \ldots \wedge \neg P_n) \vee Q \\ &\approx (\neg P_1 \vee Q) \wedge \ldots \wedge (\neg P_n \vee Q) \\ &\approx (P_1 \to Q) \wedge \ldots \wedge (P_n \to Q)\end{aligned}$$

Schema für komplexe Implikationen

Satz
Behauptung: $(P_1 \vee \ldots \vee P_n) \to Q$

Beweis (durch Fallunterscheidung, alle Fälle müssen gelten)

Fall 1: Zeige $P_1 \to Q$
...
Fall n: Zeige $P_n \to Q$

q.e.d

Beweisstrukturen

Beispiel: Komplexe Strukturen

Satz:
Voraussetzung: Sei R eine zweistellige Relation über einer Menge M und seien $a, b \in M$ mit $a \neq b$ und $R(a, b)$ und $R(b, a)$.
Behauptung: R ist weder eine Halbordnung, noch eine strenge Halbordnung, noch eine totale Ordnung.

Beweis
Z stehe für die Voraussetzung; HO stehe für "R ist Halbordnung", und sHO für "R ist strenge Halbordnung" und tO für "R ist totale Ordnung".
Die Struktur des Satzes ist: $Z \rightarrow (\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO)$

Nimm Z an und zeige die Konklusion $\neg HO \wedge \neg sHO \wedge \neg tO$

Teil 1: Zeige $\neg HO$
Teil 2: Zeige $\neg sHO$
Teil 3: Zeige $\neg tO$

q.e.d

Quantoren

Schreibweisen quantifizierter Aussagen:

Sei D eine Menge.

Sprachlich: Für alle $x, y \in D$ gilt $P(x, y)$.

Mathematisch formalisiert: $\forall x \in D : \forall y \in D : P(x, y)$

Die mathematische Formalisierung ist nicht vorgesehen in der PL1.

Logisch formalisiert: $\forall x\,(D(x) \rightarrow \forall y\,(D(y) \rightarrow P(x, y)))$

Beispiel:

Seien n und m naürliche Zahlen, dann gilt $(n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$.

Alternative Schreibweise

$\forall n \in \mathbb{N} : \ \forall m \in \mathbb{N} : (n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2$

Satzform Existenzaussage

Form: $\exists x \in D : E(x)$

Schema für Beweise von Existenzaussagen

Satz

Behauptung: $\exists x \in D : E(x)$

Beweisalternativen

1. Angabe eines konkreten Elementes $x \in D$ mit der Eigenschaft $E(x)$.
2. Indirekter Beweis.
   Annahme: $\neg(\exists x \in D : E(x))$
   Aussage $\neg(\exists x \in D : E(x))$ ist äquivalent zu $\forall x \in D : \neg E(x)$
   Leite hieraus einen Widerspruch her.
3. Nachweis der Existenz eines $x \in D$ mit der Eigenschaft $E(x)$ ohne Angabe eines konkreten Konstruktionsprinzips für x.

Satzform Allaussage

Form: $\forall x \in D : E(x)$
Für alle $x \in D$ ist die Eigenschaft E zu zeigen.

Schema für direkte Beweise von Allaussagen

Satz

Behauptung: $\forall x \in D : E(x)$

Beweis
Annahme: Sei $x \in D$ beliebig, aber fest gewählt.

Zeige $E(x)$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweisalternative: Indirekter Beweis

Beispiel:

Satz
Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen $n > 1$ gilt: $n^3 > n^2$.
Formalisiert: $\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1 \rightarrow n^3 > n^2)$

Beweis (indirekter Beweis)
Annahme des Gegenteils der Behauptung.
$\neg(\forall n \in \mathbb{N} : (n > 1 \rightarrow n^3 > n^2))$
ist äquivalent zu
$\exists n \in \mathbb{N} : (n > 1 \wedge n^3 \leq n^2)$

Sei also n_0 eine solche Zahl mit $n_0^3 \leq n_0^2$.
Wir teilen beide Seiten der Ungleichung durch n_0^2 und erhalten $n_0 \leq 1$.
Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $n_0 > 1$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweisalternative: Beweis durch Fallunterscheidung

Idee der Fallunterscheidung:
Die Grundmenge D in endlich viele disjunkte Teilmengen aufteilen, $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$ und nacheinander für jede der Mengen D_i die Aussage $\forall x \in D_1 : E(x)$ zeigen.

Satz
Behauptung: $\forall x \in D : E(x)$

Beweis (durch Fallunterscheidung)
Wir zerlegen die Menge D in $D = D_1 \cup \ldots \cup D_r$.

Fall 1: Menge D_1. Zeige $\forall x \in D_1 : E(x)$.

...

Fall r: Menge D_r. Zeige $\forall x \in D_r : E(x)$.

q.e.d

Allaussage

Form $\forall x \in D : E(x)$

Beweis durch Fallunterscheidung

Beispiel:

Satz
Behauptung: Für alle ganzen Zahlen außer 0 und 1 gilt $n^2 > n$.

Beweis (Beweis durch Fallunterscheidung)
Wir zerlegen die Menge der ganzen Zahlen in

$$M_+ = \{n : n > 1\} \text{ und } M_- = \{n : n < 0\}.$$

Fall 1: Es gelte $n \in M_+$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.
Fall 2: Es gelte $n \in M_-$. Dann zeigen wir $n^2 > n$.

q.e.d

Fallunterscheidung

Satz

Voraussetzung: Seien A und B zweistellige, symmetrische Relationen über der Menge M.

Behauptung: Dann ist $C = A \cup B$ eine symmetrische Relation.

Beweis (geschachtelte Fallunterscheidung)

Fall 1: A und B seien leer.

Dann ist auch C leer und gemäß Definition auch symmetrisch.

Fall 2: A oder B seien nicht leer.

Dann ist auch C nicht leer. Es sei xCy für Elemente x und y.

Fallunterscheidung nach xAy.

Fall 2.1: Gelte xAy.

Dann gilt auch yAx, da A symmetrisch ist, und damit gilt auch yCx.

Fall 2.2: Gelte nicht xAy.

Wegen xCy muss dann xBy gelten.

Da B symmetrisch ist, erhalten wir yBx und damit yCx.

q.e.d

Eindeutigkeit

Form $\exists! x \in D : E(x)$

Der Quantor $\exists! x \in D$ soll ausdrücken, dass es nur genau ein x aus D gibt mit der Eigenschaft $E(x)$.
Logisch formalisiert:
$\exists x\,(D(x) \wedge E(x)) \wedge \forall x \forall y\,((D(x) \wedge D(y) \wedge E(x) \wedge E(y)) \rightarrow x = y)$

Satz
Behauptung: $\exists! x \in D : E(x)$

Beweis:

Schritt 1 (Existenz): Zeige $\exists x_0 \in D : E(x_0)$.
Schritt 2 (Eindeutigkeit):
Alternative 1: (x_0 explizit bekannt)
Zeige $\forall x \in D \setminus \{x_0\} : \neg E(x)$
Alternative 2:
Zeige $\forall x \in D\ \forall y \in D : ((E(x) \wedge E(y)) \rightarrow x = y)$.

q.e.d

Funktionale Abhängigkeit

Form $\forall x \in A: \; \exists y \in B: E(x, y)$

Wir können die Quantorfolge $\forall x \in A \; \exists y \in B$ aus eher funktionaler Sicht behandeln. Zu jedem $x \in A$ muss es mindestens ein $y \in B$ geben mit der Eigenschaft $E(x, y)$. Die Zuordnung eines y abhängig vom x kann man daher als Funktion betrachten.

Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N}: \; (n > 2 \rightarrow n^2 < m < n^3))$.
Zeige die Eigenschaft für $m = f(n) = n^2 + 1$

Satz
Behauptung: $\forall x \in A \; \exists y \in B : E(x, y)$

Beweis
Konstruiere zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$.

Geschieht z.B. durch Angabe einer Funtion $f : A \rightarrow B$, also $y = f(x)$.
Zeige für das gewählte f die Eigenschaft $\forall x \in A : E(x, f(x))$.

q.e.d

Bemerkung: Skolemisierung (Skolem Normalform)