Prädikatenlogik

Übersicht:

1. **Teil 1: Syntax und Semantik**
2. Teil 2: Normalformen und Grenzen der Prädikatenlogik 1. Stufe
3. Teil 3: Modellierung und Beweise
4. Teil 4: Substitution, Unifikation und Resolution

Einführende Beispiele

Beispiele:

1. Geschwister

$$\forall x \forall y ((\exists u \exists v (\mathit{Eltern}(u, v, x) \wedge \mathit{Eltern}(u, v, y))) \rightarrow \mathit{Geschwister}(x, y))$$

2. Symmetrische Relation

$$\forall x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$$

3. Funktionen

$$\forall x (P(a) \wedge (P(x) \rightarrow P(f(x))))$$

$\exists$ ist der Existenzquantor (es gibt)
$\forall$ ist der Allquantor (für alle)

Zeichenvorrat

1. Individuenvariablen: $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
2. Individuenkonstanten: $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$
3. Funktionssymbole beliebiger Stelligkeiten: $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$
4. Prädikatssymbole beliebiger Stelligkeiten: $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$
5. Junktoren: $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$
6. Quantoren: $\forall, \exists$
7. Hilfszeichen: (,), , (Komma)

Jedes Funktions- und Prädikatsymbol wird in einem Kontext mit nur einer, zwar beliebigen, aber festen Stelligkeit verwendet.

Terme

Definition 1 (Terme)

Die *Klasse der Terme* wird induktiv definiert durch die folgenden vier Schritte.

(1) Jede Individuenvariable ist ein Term.

(2) Jede Individuenkonstante ist ein Term.

(3) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol, so ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term.

(4) Nur mit (1) – (3) gebildete Ausdrücke sind Terme.

Beispiel: Sei f zweistellig und g einstellig, dann sind $f(g(a), x)$, $g(g(y))$ und $g(f(x, b))$ Terme.

Terme, Signatur

Jeder Term besitzt eine eindeutige Zerlegung:
Er ist entweder eine Variable, eine Konstante oder ein (mit Hilfe einer Funktion) zusammengesetzter Term.

Signatur in der Logik: Die Menge KS der Konstantensymbole, FS der Funktionssymbole und PS der Prädikatssymbole einer Formel α können wir in einem Tripel $\Sigma = (KS, FS, PS)$ zusammenfassen.
In der Logik wird Σ auch als die durch α induzierte Signatur bezeichnet.

Man kann die Klasse der Terme auch einschränken durch eine gegebene Signatur und eine Menge von Variablen.
$T_\Sigma(V)$ bezeichnet die Klasse der Terme, die mit Individuenkonstanten und Funktionssymbolen der Signatur Σ und Variablen aus der Variablenmenge V gebildet werden können.

Prädikatenlogische Formeln 1. Stufe (PL1)

Definition 2 (Prädikatenlogische Formeln der 1. Stufe (PL1))

Die *Klasse der prädikatenlogischen Formeln* wird induktiv definiert durch die folgenden fünf Schritte.

(1) Sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme und P eine n-stelliges Prädikatssymbol, so ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine Formel.

(2) Ist α eine Formel, so ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.

(3) Falls α und β Formeln sind, so sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.

(4) Falls α eine Formel ist und x eine Individuenvariable, so sind auch $(\forall x \alpha)$ und $(\exists x \alpha)$ Formeln.

(5) Nur mit (1) – (4) gebildete Ausdrücke sind Formeln.

Notation: $P(t_1, \ldots, t_n)$ wird auch als Primformel bezeichnet.

Achtung: $\forall f \forall x P(x, f(x))$ ist keine Formel in PL1!!!!!

Bindungsregeln

Zur Klammereinsparung ist es wieder sinnvoll, Bindungsregeln festzulegen.
(transitive) Bindungsregeln:

1.) $\forall$, $\exists$ und $\neg$ binden stärker als $\wedge$.
2.) $\wedge$ bindet stärker als $\vee$.
3.) $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$.
4.) $\rightarrow$ bindet stärker als $\leftrightarrow$.
5.) Binäre Operatoren gleicher Stärke werden als links geklammert angesehen. (linksassoziativ)

Beispiel: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ entspricht $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$

Notation:
Negierte und nicht-negierte Primformeln werden als *Literale* bezeichnet.
Eine nicht-negierte Primformel $P(t_1, \dots, t_n)$ heißt auch *positives Literal* und $\neg P(t_1, \dots, t_n)$ *negatives Literal*.

Die Mengen $vars(t)$ bzw. $vars(\alpha)$ der Variablen, $freevars(\alpha)$ der *freien Variablen* und $boundvars(\alpha)$ der *gebundenen Variablen*:

(1) Ist t eine Individuenvariable, $t = x$, so ist $vars(t) = \{x\}$.

(2) Ist t eine Individuenkonstante, $t = a$, so ist $vars(t) = \emptyset$.

(3) Ist $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$ so ist $vars(t) = \bigcup_{i=1}^{n} vars(t_i)$.

(4) Ist $\alpha = P(t_1, \ldots, t_n)$ mit Termen $t_1, \ldots, t_n$, so ist $vars(\alpha) = freevars(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} vars(t_i)$ und $boundvars(\alpha) = \emptyset$.

(5) Ist $\alpha = \neg\beta$ mit einer Formel β, so ist $vars(\alpha) = vars(\beta)$, $freevars(\alpha) = freevars(\beta)$ und $boundvars(\alpha) = boundvars(\beta)$.

(6) Falls $\alpha = \beta \wedge \gamma$ oder $\alpha = \beta \vee \gamma$ mit Formeln β und γ, so ist $vars(\alpha) = vars(\beta) \cup vars(\gamma)$, $freevars(\alpha) = freevars(\beta) \cup freevars(\gamma)$ und $boundvars(\alpha) = boundvars(\beta) \cup boundvars(\gamma)$.

(7) Falls $\alpha = \forall x\beta$ oder $\alpha = \exists x\beta$ mit einer Formel β und einer Individuenvariablen x, so ist
$vars(\alpha) = vars(\beta) \cup \{x\}$, $freevars(\alpha) = freevars(\beta) \setminus \{x\}$ und
$boundvars(\alpha) = boundvars(\beta) \cup \{x\}$.

Wirkungsbereich

Beispiel:

$$\forall x \exists y (P(x, y) \wedge \exists x (Q(x, x) \vee S(y)))$$

eine Variable x kann in Verbindung mit mehreren Quantoren auftreten;
erlaubt, aber schwer zu lesen.

$$P(x, a) \wedge \exists x (S(x) \vee R(x, y))$$

Die Variable x kommt ungebunden (frei) vor, in $P(x, a)$,
und gebunden im zweiten Teil.

Frage:
Wie ist der Wirkungsbereich der Quantoren festgelegt?
Kann man eine Variable umbenennen? $\forall x P(x)$ versus $\forall y P(y)$

Wirkungsbereich

In der Formel $\exists x\alpha$ oder $\forall x\alpha$ *bindet der Quantor alle Vorkommen der Variable mit Namen* x in der Formel α, außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor innerhalb gebunden sind.

x ist die Variable des Quantors, und der *Wirkungsbereich des Quantors* ist die Formel α.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt *frei*, wenn es nicht im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt: $x \in \mathit{freevars}(\alpha)$
Sprechweise: Variable x kommt frei vor, x ist freie Variable.

Ein Vorkommen einer Variable x heißt gebunden, wenn es im Wirkungsbereich eines Quantors für x liegt: $x \in \mathit{boundvars}(\forall x\alpha)$

Definition 3

Enthält eine Formel keine freien Variablen, dann bezeichnen wir die Formel auch als geschlossene Formel.

Wirkungsbereich

Beispiele:

1.

$$(\forall x P(x)) \wedge S(x)$$

Das erste Vorkommen von x (in $P(x)$) ist gebunden, das zweite Vorkommen von x ist frei.
Der Wirkungsbereich des Quantors $\forall x$ ist nur $P(x)$.

2.

$$(\exists x(P(x) \wedge Q(x))) \wedge \forall x S(x)$$

Alle Vorkommen von x sind gebunden,
der Wirkungsbereich des ersten Quantors ($\exists x$) ist $(P(x) \wedge Q(x))$,
der Wirkungsbereich des zweiten Quantors ($\forall x$) ist $S(x)$.

Konsistente Umbenennung

Definition 4

Eine Formel ist *konsistent* umbenannt, falls
1. keine Variable x gleichzeitig frei und gebunden vorkommt,
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Namen besitzen.

Konsistente Umbenennung

Definition 4

Eine Formel ist *konsistent* umbenannt, falls
1. keine Variable x gleichzeitig frei und gebunden vorkommt,
2. die Variablen verschiedener Vorkommen von Quantoren verschiedene Namen besitzen.

Algorithmus für die konsistente Umbenennung

1. Solange ein Variable x frei und gebunden vorkommt, wähle einen *neuen* Variablennamen z und ersetze alle freien Vorkommen von x durch z.
2. Solange es zwei verschiedene Quantoren mit einer Variable x gibt, wähle einen der Quantoren aus und einen *neuen* Variablennamen z, ersetze im Wirkungsbereich des Quantors alle Vorkommen von x durch z,
   außer den Vorkommen von x, die durch einen weiteren Quantor über x in diesem Wirkungsbereich gebunden sind.

Konsistente Umbenennung

Beispiel:

$$R(x) \wedge \forall x(P(x) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

x kommt frei in $R(x)$ und gebunden im Rest vor,
wähle neuen Namen z und ersetze die frei vorkommenden x durch z.

$$R(z) \wedge \forall x(P(x) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

x kommt mit mehreren Quantoren vor, wähle neuen Namen y;
ersetze im Wirkungsbereich des ersten Quantors, außer in anderen Wirkungsbereichen

$$R(z) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall x(Q(x) \wedge \exists x S(x)))$$

führe die entsprechende Ersetzung für $\forall x$ aus, da x mit zwei Quantoren auftritt, der neue Variablenname sei w.

$$R(z) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall w(Q(w) \wedge \exists x S(x)))$$

Semantik: Idee

Idee: (keine formale Definition !!!)

$$\alpha = \forall x R(x, x)$$

Übersetzung der formalen Sprache in die Sprache der Domäne

1. Grundbereich: $\omega := \{a, b, c\}$
2. Variable x_ω über ω
3. Relation $R_\omega \subseteq \omega^2$ und $R_\omega := \{(a, a), (a, b), (b, c)\}$
4. Frage: Ist die Formel für diese Zuordnung (Interpretation) wahr?

Für alle $x_\omega \in \{a, b, c\}$ gilt $R_\omega(x_\omega, x_\omega)$?

Semantik: Idee

Idee: (keine formale Definition !!!)

$$\alpha = \forall x(P(a) \wedge P(f(x)))$$

Übersetzung der formalen Sprache in die Sprache der Domäne

1. Grundbereich: $\omega := \{1, 2, 3, 4\}$
2. Variable x_ω über ω
3. Konstante $a_\omega = 1$
4. Funktion $f_\omega(1) = 1, \quad f_\omega(2) = f_\omega(3) = f_\omega(4) = 2$
5. Relation $P_\omega \subseteq \omega$ und $P_\omega := \{1, 4\}$
6. Frage: Ist die Formel für diese Zuordnung (Interpretation) wahr?

Für alle $x_\omega \in \omega$ gilt $(P_\omega(1)$ und $P_\omega(f_\omega(x_\omega)))$???

Interpretation

Definition 5 (Interpretation)

Eine *Interpretation* $\Im$ ist ein nicht leerer Grundbereich ω zusammen mit einer Abbildung der Individuenvariablen, Individuenkonstanten, Funktionskonstanten und Prädikatskonstanten einer (durch eine Formel α induzierten) Signatur Σ und einer Variablenmenge V auf entsprechende Objekte (gleicher Stelligkeit) über dem Grundbereich ω:

$$
\begin{array}{lllllll}
\Im: & \omega \neq \emptyset & & & & & \\
 & x & \mapsto & x_\omega \in \omega & f^{(n)} & \mapsto & f_\omega : \omega^n \to \omega \\
 & \vdots & & & \vdots & & \\
 & a & \mapsto & a_\omega \in \omega & P^{(n)} & \mapsto & P_\omega \subseteq \omega^n \\
 & \vdots & & & \vdots & &
\end{array}
$$

Interpretation von Termen

Die Abbildung der Variablen und Konstanten auf Elemente von ω lässt sich induktiv erweitern zu einer ebenfalls mit $\Im$ bezeichneten Interpretation der Terme in $T_\Sigma(V)$ durch Elemente von ω:

$$\Im(f(t_1, \ldots, t_n)) = \Im(f)(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n))$$

Beispiel:
$\omega = \{1, 2\}$
$x_\omega = 1$, d.h. $\Im(x) = 1$
$a_\omega = 2$, d.h. $\Im(a) = 2$
$f_\omega(1,1) = 1, f_\omega(1,2) = 2, f_\omega(2,1) = 2, f_\omega(2,2) = 1$, also $\Im(f) = f_\omega$

$$\begin{aligned}
\Im(f(f(a,a),x)) &= \Im(f)(\Im(f(a,a)), \Im(x)) \\
&= \Im(f)(\Im(f)(\Im(a), \Im(a)), \Im(x)) \\
&= f_\omega(f_\omega(a_\omega, a_\omega), x_\omega) \\
&= f_\omega(f_\omega(2,2), 1) = f_\omega(1,1) = 1
\end{aligned}$$

Interpretation von Formeln

Den Formeln können dann Wahrheitswerte zugewiesen werden durch eine auf der Interpretation der Terme basierende Funktion, die wieder mit $\Im$ bezeichnet wird:

Definition 6

(1) $\Im(P(t_1, \ldots, t_n)) = 1$ gdw. $P_\omega(\Im(t_1), \ldots, \Im(t_n))$ gilt.

(2) $\Im(\neg\alpha) = 1$ gdw. $\Im(\alpha) = 0$.

(3) $\Im(\alpha \wedge \beta) = 1$ gdw. $\Im(\alpha) = 1$ und $\Im(\beta) = 1$.
$\Im(\alpha \vee \beta) = 1$ gdw. $\Im(\alpha) = 1$ oder $\Im(\beta) = 1$.

(4) $\Im(\forall x\alpha) = 1$ gdw. für jedes $x_\omega \in \omega$ gilt $\Im_{[x/x_\omega]}(\alpha) = 1$
$\Im(\exists x\alpha) = 1$ gdw. es ein $x_\omega \in \omega$ gibt mit $\Im_{[x/x_\omega]}(\alpha) = 1$.

Dabei bezeichnet $\Im_{[x/x_\omega]}$ die Interpretation, die mit $\Im$ völlig übereinstimmt bis auf die Zuweisung eines Wertes an die Variable x, die unter $\Im$ den Wert $\Im(x)$, unter $\Im_{[x/x_\omega]}$ jedoch den Wert x_ω erhält.

Interpretation von Formeln

Beispiel:
Sei $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall z(P(z, z) \to P(z, f(z))) \wedge \neg P(a, a)$.
Dann ist durch $\Im$ mit

$$\begin{array}{llllll} \Im: & \omega = \{1, 2\} & & & & \\ & a & \mapsto & 1 & f^{(1)} & \mapsto & f_\omega : \omega \to \omega \\ & & & & & & f_\omega(1) = 2, f_\omega(2) = 1 \\ & & & & P^{(2)} & \mapsto & P_\omega = \{(1, 2), (2, 1)\} \end{array}$$

eine Interpretation für α gegeben.

Interpretation von Formeln

Beispiel (Fortsetzung):
Offensichtlich gilt für diese Interpretation:

$$\begin{aligned} & \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gibt es ein } y_\omega \in \{1,2\} \text{ mit } (x_\omega, y_\omega) \in P_\omega. \\ \Longrightarrow\ & \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gibt es ein } y_\omega \in \{1,2\}\ \Im_{[x/x_\omega][y/y_\omega]}(P(x,y)) = 1. \\ \Longrightarrow\ & \text{Für alle } x_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt } \Im_{[x/x_\omega]}(\exists y P(x,y)) = 1. \\ \Longrightarrow\ & \Im(\forall x \exists y P(x,y)) = 1 \end{aligned}$$

Weiter gilt für $\Im$:

$$\begin{aligned} & \text{Für alle } z_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt mit } (z_\omega, z_\omega) \in P_\omega \text{ auch } (z_\omega, f_\omega(z_\omega)) \in P_\omega. \\ \Longrightarrow\ & \text{Für alle } z_\omega \in \{1,2\} \text{ gilt } \Im_{[z/z_\omega]}(P(z,z) \rightarrow P(z,f(z))) = 1. \\ \Longrightarrow\ & \Im(\forall z(P(z,z) \rightarrow P(z,f(z)))) = 1 \end{aligned}$$

Da auch noch $(1,1) \notin P_\omega$ gilt, folgt insgesamt $\Im(\alpha) = 1$, diese Interpretation $\Im$ erfüllt also die prädikatenlogische Formel α.

Grundbegriffe

Analog zu den Definitionen in der Aussagenlogik.

Definition 7

Eine prädikatenlogische Formel α heißt

erfüllbar genau dann, wenn es eine Interpretation $\Im$ mit $\Im(\alpha) = 1$ gibt,

falsifizierbar gdw. es eine Interpretation $\Im$ mit $\Im(\alpha) = 0$ gibt,

widerspruchsvoll gdw. für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = 0$ gilt,

tautologisch gdw. für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = 1$ gilt.

Statt „α ist eine Tautologie“ verwendet man auch die Sprechweise α ist *(allgemein–)gültig*.

Interpretation von Formeln

Satz 8

(Satz von Löwenheim/Skolem)
Jede erfüllbare Formel der Prädikatenlogik erster Stufe besitzt eine erfüllende Interpretation mit abzählbarem Grundbereich.

Suche nach erfüllenden Bewertungen kann auf *abzählbare Grundbereiche* beschränkt werden:

1. endliche (hier nicht-leere) Mengen,
2. unendliche Mengen isomorph zu den natürlichen Zahlen.
3. Teilmengen reeller Zahlen müssen nicht betrachtet werden, wenn sie wie die Menge der reellen Zahlen überabzählbar sind.

Zusammenhänge

Wie in der Aussagenlogik.

Satz 9

α *ist widerspruchsvoll gdw.*
α *ist nicht erfüllbar gdw.*
$\neg\alpha$ *ist Tautologie gdw.*
$\neg\alpha$ *ist nicht falsifizierbar*

Semantische Folgerung

Wie in der Aussagenlogik.

Definition 10 (Semantischer Folgerungsbegriff)

Seien α und β prädikatenlogische Formeln, dann *folgt* β *(semantisch)* aus α ($\alpha \models \beta$) genau dann, wenn für alle Bewertungen $\Im$ gilt:

$$\text{Wenn} \Im(\alpha) = 1 \text{ gilt, dann auch } \Im(\beta) = 1.$$

Beispiel:

$$\forall x \; P(x) \models \exists y \; P(y)$$

Was immer wir als Interpretation $\Im$ wählen (Grundbereich ω und Relation P_ω), es gilt:
Gilt $\Im(\forall x \; P(x)) = 1$, dann auch $\Im(\exists y \; P(y)) = 1$

Semantische Folgerung

Wie in der Aussagenlogik.

Satz 11

Seien α und β prädikatenlogische Formeln, dann gilt:

a) $\alpha \models \beta$ *gdw.* $(\alpha \wedge \neg\beta)$ *widerspruchsvoll ist.*

b) α *ist widerspruchsvoll gdw. für alle Formeln* β *gilt:* $\alpha \models \beta$

c) α *ist widerspruchsvoll gdw. es eine Formel* β *gibt mit:* $\alpha \models (\beta \wedge \neg\beta)$

Deduktionstheorem

Satz 12 (Deduktionstheorem für $\models$)

Seien α und β prädikatenlogische Formeln und M eine Menge solcher Formeln, dann gilt:

$$M \cup \{\alpha\} \models \beta \quad \Longrightarrow \quad M \models (\alpha \to \beta)$$

Logische Äquivalenz

Wie in der Aussagenlogik.

Definition 13

Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn für alle Interpretationen $\Im(\alpha) = \Im(\beta)$ gilt.

Satz 14

Seien α und β Formeln, dann gilt:
$\alpha \approx \beta$ *genau dann, wenn* $\alpha \models \beta$ *und* $\beta \models \alpha$ *gilt.*

Umformungsregeln - Teil 1

Seien α und β Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Vererbung	$\alpha \approx \beta \implies \neg\alpha \approx \neg\beta$
	$\alpha \approx \beta \implies \gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$ und $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$
	$\alpha \approx \beta \implies \exists x\alpha \approx \exists x\beta$ und $\forall x\alpha \approx \forall x\beta$
Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$
	$\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Neutrales Element	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta \approx \beta$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \wedge \beta \approx \beta$
Kontrad./Tautol.	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \beta \approx \alpha \wedge \neg\alpha$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \approx \alpha \vee \neg\alpha$

Umformungsregeln - Teil 2

Seien α, β und γ Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$
	$\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Absorption	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \approx \alpha$
	$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \approx \alpha$

Umformungsregeln - Teil 3

Seien α und β Formeln in PL1. Es gelten folgende Regeln:

Quantorwechsel	$\neg(\exists x\alpha) \approx \forall x(\neg\alpha)$ und $\neg(\forall x\alpha) \approx \exists x(\neg\alpha)$
Quantortausch	$\exists x\exists y\alpha \approx \exists y\exists x\alpha$ $\forall x\forall y\alpha \approx \forall y\forall x\alpha$
Quantorzusammenfassung	$\exists x\alpha \vee \exists x\beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$
Quantorelimination	Wenn x keine freie Variable in α: $\exists x\alpha \approx \alpha$ und $\forall x\alpha \approx \alpha$
Quantifizierung	Wenn x keine freie Variable in β: $\exists x\alpha \wedge \beta \approx \exists x(\alpha \wedge \beta)$ und $\exists x\alpha \vee \beta \approx \exists x(\alpha \vee \beta)$ $\forall x\alpha \wedge \beta \approx \forall x(\alpha \wedge \beta)$ und $\forall x\alpha \vee \beta \approx \forall x(\alpha \vee \beta)$
Umbenennung	Wenn x' keine Variable in α: $\exists x\alpha \approx \exists x'\alpha[x/x']$ und $\forall x\alpha \approx \forall x'\alpha[x/x']$

$\alpha[x/x']$ bezeichnet die Ersetzung aller Vorkommen von x durch x' in α.

Umformungsregeln - Beispiele

Quantorenwechsel:

$$\neg\exists y \forall x P(x,y) \approx \forall y \neg\forall x P(x,y) \approx \forall y \exists x \neg P(x,y)$$

Quantorenzusammenfassung:

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x R(x) \approx \forall x (\exists y P(x,y) \wedge R(x))$$

Quantorenelimination: x ist keine freie Variable in $\forall y P(y) \wedge \exists x R(x)$

$$\exists x (\forall y \; P(y) \wedge \exists x \; R(x)) \approx \forall y P(y) \wedge \exists x R(x)$$

Quantifizierung: x ist keine freie Variable in $\exists y S(y)$.

$$\exists x P(x) \wedge \exists y S(y) \approx \exists x (P(x) \wedge \exists y S(y))$$

Konsistente Umbenennung:

$$\exists x (P(x) \wedge \exists x S(x)) \approx \exists y (P(y) \wedge \exists x S(x))$$