Aussagenlogik

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. **Teil 2: Modellierung und Beweise**

Modellierungsaufgabe

Es gibt drei Tauben und zwei Löcher. Jede Taube soll in ein Loch. Aber es passt nur eine Taube in ein Loch.
Gibt es eine Lösung?

Ansatz 1: (Funktion)

Die Tauben seien T_1, T_2 und T_3 und die Löcher seien L_1 und L_2.
Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \{T_1, T_2, T_3\} \rightarrow \{L_1, L_2\}$?

Es gibt keine Lösung, da der Definitionsbereich und der Bildbereich unterschiedliche Kardinalitäten besitzen.

Modellierungsaufgabe

Es gibt drei Tauben und zwei Löcher. Jede Taube soll in ein Loch. Aber es passt nur eine Taube in ein Loch.
Gibt es eine Lösung?

Ansatz 2: (Aussagenlogik)

$X_{i,j}$ Atom für $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 2$. Idee: Taube i ist im Loch j.

$\alpha = (X_{1,1} \vee X_{1,2})$ Taube T_1 ist im Loch L_1 oder im Loch L_2
$\quad \wedge (X_{2,1} \vee X_{2,2}) \wedge (X_{3,1} \vee X_{3,2})$
$\quad \wedge \neg(X_{1,1} \wedge X_{2,1})$ in Loch L_1 sind nicht beide Tauben T_1 und T_2
$\quad \wedge \neg(X_{1,1} \wedge X_{3,1}) \wedge \neg(X_{2,1} \wedge X_{3,1})$
$\quad \wedge \neg(X_{1,2} \wedge X_{2,2}) \wedge \neg(X_{1,2} \wedge X_{3,2}) \wedge \neg(X_{2,2} \wedge X_{3,2})$

$$\begin{aligned}\alpha \approx\ & (X_{1,1} \vee X_{1,2}), (X_{2,1} \vee X_{2,2}), (X_{3,1} \vee X_{3,2}),\\ & (\neg X_{1,1} \vee \neg X_{2,1}), (\neg X_{1,1} \vee \neg X_{3,1}), (\neg X_{2,1} \vee \neg X_{3,1})\\ & (\neg X_{1,2} \vee \neg X_{2,2}), (\neg X_{1,2} \vee \neg X_{3,2}), (\neg X_{2,2} \vee \neg X_{3,2})\end{aligned}$$

Modellierungsaufgabe

Fortsetzung Ansatz 2: (Aussagenlogik)

$$\begin{aligned}\alpha \approx\ & (X_{1,1} \vee X_{1,2}), (X_{2,1} \vee X_{2,2}), (X_{3,1} \vee X_{3,2}),\\ & (\neg X_{1,1} \vee \neg X_{2,1}), (\neg X_{1,1} \vee \neg X_{3,1}), (\neg X_{2,1} \vee \neg X_{3,1})\\ & (\neg X_{1,2} \vee \neg X_{2,2}), (\neg X_{1,2} \vee \neg X_{3,2}), (\neg X_{2,2} \vee \neg X_{3,2})\end{aligned}$$

Ist α widerspruchsvoll?

Überprüfung mit Bewertungen erfordert 2^6 Tests (6 Atome).
Formel ist in KNF.

Alternativer Ansatz für den Beweis auf Widerspruch: RESOLUTION

Aussagenlogische Resolution

Formeln sind in konjunktiver Normalform.

Definition 1 (Resolutionsregel)

Seien α eine Klausel mit Literal L und β eine Klausel mit Literal $\neg L$.
α und β sind die Elternklauseln.
$(\alpha \setminus \{L\}) \cup (\beta \setminus \{\neg L\})$ ist die **Resolvente**.

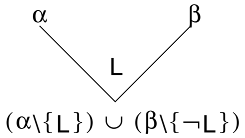
Schreibweisen:

1. $\frac{\alpha \qquad \beta}{(\alpha \setminus \{L\}) \cup (\beta \setminus \{\neg L\})} (RES)$
2. $\alpha, \beta \mid\!\frac{1}{RES}\; (\alpha \setminus \{L\}) \cup (\beta \setminus \{\neg L\})$
3. Die leere Klausel wird mit $\sqcup$ bezeichnet. Sie ist immer falsch.
   Beispiel: $\{L, \neg L\} \mid\!\frac{1}{RES}\; \sqcup$

Aussagenlogische Resolution

Für einen Resolutionsschritt $\frac{\alpha \vee L, \neg L \vee \beta}{\alpha \vee \beta}$(Res) schreiben wir auch

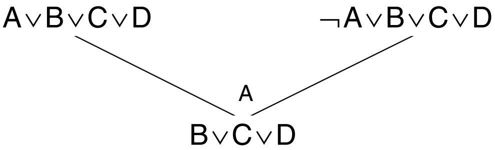
$$\alpha \vee L, \neg L \vee \beta \mid\!\frac{1}{RES}\; \alpha \vee \beta.$$



Baumdarstellung eines Resolutionsschrittes

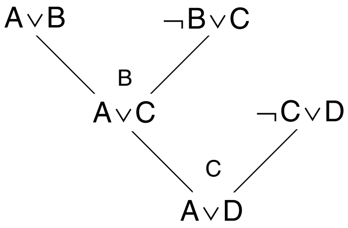
Aussagenlogische Resolution

Beispiel 1: $\alpha_1 = \{A \vee B \vee C \vee D, \neg A \vee B \vee C \vee D\}$



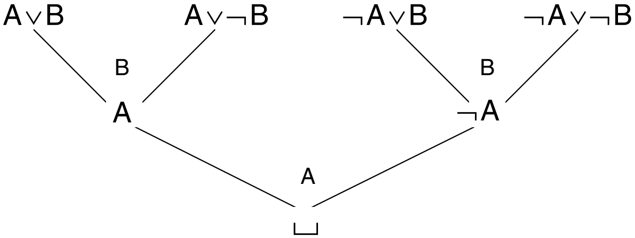
Aussagenlogische Resolution

Beispiel 2: $\alpha_2 = \{A \vee B, \neg B \vee C, \neg C \vee D\}$



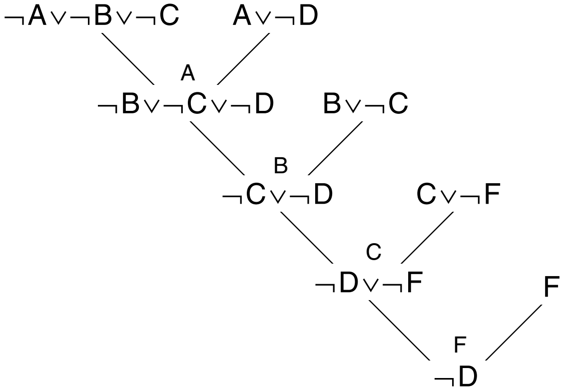
Aussagenlogische Resolution

Beispiel 3: $\alpha_3 = \{A \vee B, A \vee \neg B, \neg A \vee B, \neg A \vee \neg B\}$



Aussagenlogische Resolution

Beispiel 4: $\alpha_4 = \{\neg A \vee \neg B \vee \neg C, A \vee \neg D, B \vee \neg C, C \vee \neg F, F\}$



Aussagenlogische Resolution

Definition 2 (Herleitung)

Sei $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ eine Formel in KNF und π eine Klausel. Eine Folge $\pi_1, \ldots, \pi_k$ ist eine *Herleitung* der Klausel π aus α, wenn $\pi = \pi_k$ gilt und für alle j mit $1 \leq j \leq k$ gilt $\pi_j \in \alpha$ oder es gibt j_1 und j_2 mit $1 \leq j_1, j_2 < j$ und $\pi_{j_1}, \pi_{j_2} \mid\!\frac{1}{RES}\; \pi_j$.

Wir sagen π ist *(mit der Resolution) herleitbar* aus α, in Zeichen $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\; \pi$.

Die Klauseln aus α bezeichnen wir als *Ausgangs*– oder *Startklauseln* oder auch als *Input–Klauseln*.

Die *Länge der Herleitung* $\pi_1, \ldots, \pi_k$ ist k.

Aussagenlogische Resolution

Wir können $\mid\!\frac{}{RES}$ als den transitiven und reflexiven Abschluss von $\mid\!\frac{1}{RES}$ auffassen.

Wir verwenden für $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in$ KNF mit Klauseln α_i und α_j und $\alpha_i, \alpha_j \mid\!\frac{1}{RES}\ \delta$
die Schreibweise $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \mid\!\frac{1}{RES}\ \delta$ oder auch $\alpha \mid\!\frac{1}{RES}\ \delta$.

Für Resolventenmengen verwenden wir analoge Abkürzungen.

Für die Herleitungen $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\ L_1$ und $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\ L_2$ schreiben wir kurz $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\ L_1, L_2$.

Für $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ mit $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\ \beta_j$ für alle $1 \leq j \leq m$ schreiben wir $\alpha \mid\!\frac{}{RES}\ \beta$.

Aussagenlogische Resolution

Definition 3 (Resolutionsabschluss)

Sei $\alpha \in \mathit{KNF}$ und $n \geq 0$. Dann sei

$$\begin{array}{rcl} \mathit{Res}^0(\alpha) & := & \alpha \\ \mathit{Res}^1(\alpha) & := & \{\pi \mid \exists \tau_1 \tau_2 \in \alpha : \tau_1, \tau_2 \mid\!\frac{1}{\mathit{RES}}\; \pi\} \cup \{\alpha\} \\ \mathit{Res}^{n+1}(\alpha) & := & \mathit{Res}^1(\mathit{Res}^n(\alpha)) \text{ für } n > 0 \\ \mathit{Res}^*(\alpha) & := & \bigcup_n \mathit{Res}^n(\alpha) \end{array}$$

Wir bezeichnen $\mathit{Res}^*(\alpha)$ auch als *Resolutionsabschluss* von α.

Aussagenlogische Resolution

Beispiel für Stufensättigungsstrategie:
Wir geben die Resolvententabelle für die Formel α bis zur Stufe 3 an.

$$\alpha = \{\{\neg A, \neg B, \neg C\}, \{A, \neg D\}, \{B, \neg C\}, \{C, \neg F\}, \{F\}\}$$

Nach Stufe 3 können keine neuen Klauseln mehr generiert werden.

0	1		2		3	
1. $\{\neg A, \neg B, \neg C\}$	6. $\{\neg B, \neg C, \neg D\}$	$(1,2)$	11. $\{\neg C, \neg D\}$	$(6,3)$	21. $\{\neg D, \neg F\}$	$(11,4)$
2. $\{A, \neg D\}$	7. $\{\neg A, \neg C\}$	$(1,3)$	12. $\{\neg B, \neg D, \neg F\}$	$(6,4)$	22. $\{\neg D\}$	$(11,10)$
3. $\{B, \neg C\}$	8. $\{\neg A, \neg B, \neg F\}$	$(1,4)$	13. $\{\neg A, \neg F\}$	$(7,4)$		
4. $\{C, \neg F\}$	9. $\{B, \neg F\}$	$(3,4)$	14. $\{\neg A, \neg C, \neg F\}$	$(8,3)$		
5. $\{F\}$	10. $\{C\}$	$(4,5)$	15. $\{\neg A, \neg B\}$	$(8,5)$		
			16. $\{B\}$	$(9,5)$		
			17. $\{\neg C, \neg D, \neg F\}$	$(6,9)$		
			18. $\{\neg B, \neg D\}$	$(6,10)$		
			19. $\{\neg A\}$	$(7,10)$		
			20. $\{\neg A, \neg F\}$	$(8,9)$		

Aussagenlogische Resolution

Satz 4

1. *Der Resolutionskalkül ist korrekt.*
   Sei $\alpha \in KNF$, dann gilt für alle Klauseln π:
   $$\alpha \vdash_{RES} \pi \Longrightarrow \alpha \models \pi.$$
2. *Der Resolutionskalkül ist nicht vollständig.*
   Es gibt Formeln $\alpha \in KNF$ und Klauseln π, so dass gilt:
   $$\alpha \models \pi \text{ und nicht } \alpha \vdash_{RES} \pi.$$
3. *Der Resolutionskalkül ist widerlegungsvollständig: Sei $\alpha \in KNF$, dann gilt:*
   $$\alpha \text{ ist widerspruchsvoll} \Longrightarrow \alpha \vdash_{RES} \sqcup$$

Satz 5

Sei $\alpha \in KNF$, dann gilt: α ist widerspruchsvoll gdw. $\alpha \vdash_{RES} \sqcup$.

Aussagenlogische Resolution

Beweis (zu Satz 4)

Ad 1: Korrektheit: siehe Teil 1, Aussagenlogik

Ad 2: nicht vollständig
Sei $\alpha = A$, *dann gilt* $\alpha \models A \vee B$, *aber nicht* $A \mid\!\underline{\;\;}_{RES}\; A \vee B$.

Ad 3: Widerlegungsvollständig.
Induktion über die Länge der Herleitung oder die Anzahl n der Atome.
IA: $n = 1$, α *enthält nur das Atom A. Da* α *widerspruchsvoll ist, enthält* α *die Teilformel* $A \wedge \neg A$ *und es gilt* $A \wedge \neg A \mid\!\underline{\;\;}_{RES}\; \sqcup$.
IS: $(n \rightarrow n+1)$, α *enthalte* $n+1$ *Atome.*
Induktionsschluss siehe Vorlesungstext

q.e.d

Aussagenlogisches Schlussfolgern

Allgemeines Schema:
Gegebenen: Formeln α und β.
Frage: $\alpha \models \beta$?

1. $\alpha \models \beta$?
2. $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll?
3. Transformiere $\alpha \wedge \neg\beta$ in eine äquivalente Formel in KNF, z.B. σ ($\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll gdw. σ widerspruchsvoll)
4. $\sigma \vdash_{RES} \sqcup$?

Satz 6

Sei $\sigma \in KNF$ äquivalent zu $\alpha \wedge \neg\beta$.
$\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\sigma \vdash_{RES} \sqcup$

Aussagenlogisches Schlussfolgern

Allgemeines Schema:
Gegebenen: Formeln α und β.
Frage: $\alpha \models \beta$?

1. $\alpha \models \beta$?
2. $\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll?
3. Transformiere $\alpha \wedge \neg\beta$ in eine erfüllbarkeits-äquivalente Formel in KNF,z.B. σ
   ($\alpha \wedge \neg\beta$ widerspruchsvoll gdw. σ widerspruchsvoll)
4. $\sigma \vdash_{RES} \sqcup$?

Satz 7

Sei $\sigma \in KNF$ erfüllbarkeits-äquivalent zu $\alpha \wedge \neg\beta$.
$\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\sigma \vdash_{RES} \sqcup$

Transformation in erfüllbarkeits-äquivalent KNF

Definition 8 (Erfüllbarkeits-Äquivalenz)

Zwei Formeln α und β heißen **erfüllbarkeits-äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx_{sat} \beta$, genau dann, wenn gilt: (α ist erfüllbar gdw. β ist erfüllbar).

Beipiele:

$A \approx_{sat} B$

$X \approx_{sat} \neg X$

$A \wedge \neg A \approx_{sat} B \wedge (\neg B \vee D) \wedge \neg D$

aber nicht $A \wedge \neg A \approx_{sat} B$

Gesucht: Schnelles Verfahren, dass Formeln in erfüllbarkeits-äquivalente Formeln in KNF transformiert.

Transformation in erfüllbarkeits-äquivalent KNF

Idee:
Seien α und β Formeln in NNF und X, Y, Z neue Atome. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha \vee \beta &\approx_{sat} X \wedge ((X \to Y) \vee \alpha) \wedge ((Y \to Z) \vee \beta) \wedge \neg Z \\
&\approx \quad X \wedge \ (\neg X \vee Y \vee \alpha) \ \wedge \ (\neg Y \vee Z \vee \beta) \ \wedge \neg Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &\approx_{sat} X \wedge ((X \to Y) \vee \alpha) \wedge ((X \to Y) \vee \beta) \wedge \neg Y \\
&\approx \quad X \wedge \ (\neg X \vee Y \vee \alpha) \ \wedge \ (\neg X \vee Y \vee \beta) \ \wedge \neg Y
\end{aligned}$$

Idee des Verfahrens: Ersetze schrittweise die Formeln bis nur noch Literale vorhanden sind.

Transformation mit PS-Graphen

Verfahren: **PS-Graph-KNF**

Gegeben: α in NNF, X und Y neue Atome

1. $\Phi := \{X, ((X \to Y) \vee \alpha), \neg Y\}$
2. Ersetze schrittweise bis keine Ersetzung mehr möglich ist
   1. *If* $((Z \to B) \vee \beta) \in \Phi$ und $\beta = \beta_1 \vee \beta_2$
      then wähle neues Atom A und ersetze
      $\Phi := (\Phi \setminus \{((Z \to B) \vee \beta)\}) \cup \{((Z \to A) \vee \beta_1), ((A \to B) \vee \beta_2)\}$
   2. *If* $((Z \to B) \vee \beta) \in \Phi$ und $\beta = \beta_1 \wedge \beta_2$
      then ersetze
      $\Phi := (\Phi \setminus \{((Z \to B) \vee \beta)\}) \cup \{((Z \to B) \vee \beta_1), ((Z \to B) \vee \beta_2)\}$
3. Ersetze in Φ alle Teilformeln der Struktur $((A_1 \to A_2) \vee L)$ durch $(\neg A_1 \vee A_2 \vee L)$.

Satz 9

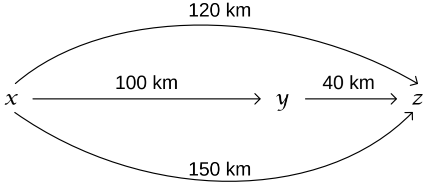
Sei α eine Formel in NNF und Φ mit dem Verfahren PS-Graph-KNF erzeugt. Dann gilt $\alpha \approx_{sat} \Phi$ und Φ ist in 3-KNF.

PS-Graphen

Graphische Repräsentation des Verfahrens.

Gerichtete Graphen

mit Labeln



mit Multi-Kanten

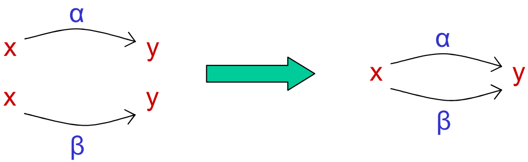
mit einem Startknoten (Quelle) und einem Zielknoten (Ziel)

Teilklasse dieser Graphen: *parallel-serielle Graphen*

Eine formale Definition dieser Graphen erfolgt später im Kapitel über Graphen.

PS-Graphen

UND: $\alpha \wedge \beta$ (parallel)



PS-Graphen

ODER: $\alpha \vee \beta$ (seriell)

$$x \xrightarrow{\alpha} z \qquad z \xrightarrow{\beta} y \qquad \Longrightarrow \qquad x \xrightarrow{\alpha} z \xrightarrow{\beta} y$$

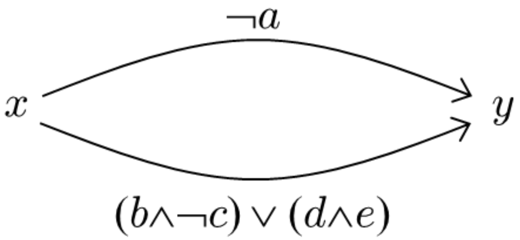
Transformation mit PS-Graphen

Beispiel: $\Psi = \neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (d \wedge e))$

$$x \xrightarrow[\neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (d \wedge e))]{} y$$

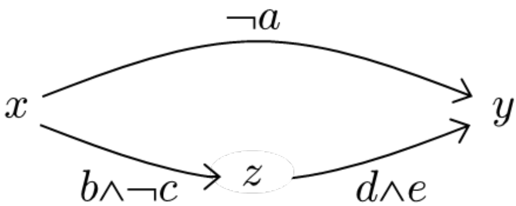
Transformation mit PS-Graphen

Beispiel: $\Psi = \neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (d \wedge e))$



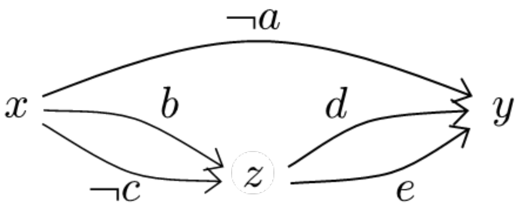
Transformation mit PS-Graphen

Beispiel: $\Psi = \neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (d \wedge e))$



Transformation mit PS-Graphen

Beispiel: $\Psi = \neg a \wedge ((b \wedge \neg c) \vee (d \wedge e))$



Transformation mit PS-Graphen

Formel:

$$\Phi = \{x, ((x \rightarrow y) \vee \neg a), ((x \rightarrow z) \vee b), ((x \rightarrow z) \vee \neg c), ((z \rightarrow y) \vee d), ((z \rightarrow y) \vee e), \neg y\}$$

Letzte Schritt: Ersetzen der Implikationszeichen.
Dann gilt $\Psi \approx_{sat} \Phi$.

Beobachtung: : Die erfüllbarkeits-äquivalente Formel Φ ist immer in 3-KNF:

Transformation in erfüllbarkeits-äquivalente KNF

Idee:

1. Transformiere die Formel in NNF,
2. erzeuge zur Formel einen gerichteten PS-Graphen mit Label,
3. aus diesem Graphen wird die Formel in KNF generiert.

Modellierung

Der Aussage **Es regnet** wird das Atom R zugeordnet. **Die Strasse ist nass** wird hier zum Atom S.

Es regnet nicht. $\neg R$.
Es regnet oder die Strasse ist nass. $R \vee S$
Es regnet und die Strasse ist nass. $R \wedge S$.
Wenn es regnet, ist die Strasse nass. $R \rightarrow S$
Es regnet genau dann, wenn die Strasse nass ist. $R \leftrightarrow S$.
Entweder die Strasse ist nass oder es regnet. $(R \vee S) \wedge (\neg R \vee \neg S)$

Modellierung mit Implikationen

Häufig verwendete Form zur Modellbildung:

Wenn **Aussage mit *oder* und *und*, aber ohne Negation**,
dann **Elementaraussage**.

Wenn es regnet oder schneit und Winter ist, dann ist es glatt.

R: Es regnet
S: Es schneit
W: Es ist Winter
G: Es ist glatt

$(R \vee S \wedge W) \rightarrow G$ (richtiges Modell, $\wedge$ bindet stärker als $\vee$)?
$\approx (R \vee (S \wedge W)) \rightarrow G$.

Horn Formeln

Definition 10 (Horn Klauseln und Horn Formeln)

Eine Klausel π ist eine Horn Klausel genau dann, wenn π maximal ein positives Literal enthält. Eine Horn Formel ist eine Konjunktion von Horn Klauseln.

Beispiele:
$((A \wedge B \wedge C) \rightarrow X) \approx (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee X)$,

(A) und $(\neg B \vee \neg C)$ sind Horn Klauseln

$(A \vee \neg B \vee X)$ ist keine Horn Klausel.

Horn Klausel $(\neg A_1 \vee \ldots \neg A_n \vee B)$ als Implikation $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$, auch geschrieben als $(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow B$

negative Klausel: $(\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n)$
positive Unit Klausel: A (Faktum)

Horn Formeln

Satz 11

Die Formel α enthalte keine Negationszeichen. Dann gibt es zu $\alpha \rightarrow B$ eine äquivalente Konjunktion von Horn Klauseln.

Idee: Wende iterativ Distributivgesetze an.

$(\alpha_1 \vee \alpha_2) \rightarrow B \approx \neg(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee B \approx ((\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_1) \vee B) \approx$
$(\neg\alpha_1 \vee B) \wedge (\neg\alpha_2 \vee B) \approx (\alpha_1 \rightarrow B) \wedge (\alpha_2 \rightarrow B)$

Beispiel:

$(R \vee (S \wedge W)) \rightarrow G \approx$
$(\neg R \wedge \neg(S \wedge W)) \vee G \approx$
$(\neg R \wedge (\neg S \vee \neg W)) \vee G) \approx$
$(\neg R \vee G) \wedge (\neg S \vee \neg W \vee G) \approx$
$(R \rightarrow G) \wedge ((S \wedge W) \rightarrow G)$

Wenn es regnet, dann ist es glatt. Wenn es schneit und Winter ist, dann ist es glatt.

Horn Formeln

Folgerung für Horn Formeln:

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y) \models Y?$

gdw.

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y), \neg Y$ widerspruchsvoll?

gdw.

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y), \neg Y \mid\!\underline{}_{RES} \sqcup$?

Horn Formeln

Folgerung für Horn Formeln:

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y) \models Y$?

gdw.

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y), \neg Y$ widerspruchsvoll?

gdw.

$A, B, (A \to X), ((X \wedge B) \to Y), \neg Y \vdash_{\overline{RES}} \sqcup$?

Definition 12 (Unit Resolution)

Die Unit-Resolution ist die gewöhnliche Resolution mit der Einschränkung, dass eine der Elternklauseln ein Literal ist. Als Bezeichnung verwenden wir $\vdash^{1}_{\overline{\textit{Unit-RES}}}$ bzw. $\vdash_{\overline{\textit{Unit-RES}}}$.

Horn Formeln

Satz 13

Eine Horn Formel α ist widerspruchsvoll genau dann, wenn es eine Unit-Resolutionswiderlegung ($\alpha \vdash_{\overline{\textit{Unit-RES}}} \sqcup$) gibt.

(ohne Beweis)

1. Ob $\alpha \vdash_{\overline{\textit{Unit-Res}}} \sqcup$ gilt, kann schnell (in linearer Zeit) entschieden werden.
2. Die Unit-Resolution ist im Allgemeinen nicht widerlegungsvollständig. $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ist widerspruchsvoll. Es gilt aber nicht $\alpha \vdash_{\overline{\textit{Unit-RES}}} \sqcup$.