Aussagenlogik

Übersicht:

1. Teil 1: Syntax und Semantik
2. Teil 2: Modellierung und Beweise

Einführendes Beispiel

Falls Lisa Peter trifft, dann trifft Lisa auch Gregor.
Lisa trifft Peter oder Lisa trifft Marko.
Gregor trifft nicht Maria, aber Marko trifft Maria.

Frage: Trifft Lisa Peter?

Einführendes Beispiel

Falls Lisa Peter trifft, dann trifft Lisa auch Gregor.
$L_P \to L_G$
Lisa trifft Peter oder Lisa trifft Marko.
$L_P \vee L_M$
Gregor trifft nicht Maria, aber Marko trifft Maria.
$(\neg G_M) \wedge M_M$

Frage: Trifft Lisa Peter?
Folgt L_P?

Abkürzungen:
L_P : Lisa trifft Peter
L_G : Lisa trifft Gregor
L_M : Lisa trifft Marko
M_M : Marko trifft Maria
G_M : Gregor trifft Maria

Syntax

1. Aussagenlogische Atome (Elementaraussagen): Großbuchstaben mit oder ohne Indizes; $A, B, X, \ldots, Y_i, \ldots$

   Atome werden auch als **aussagenlogische Variablen** bezeichnet.

   Eine Menge V von Atomen wird vorgegeben.
2. Aussagenlogische Formeln: Griechische Buchstaben; $\alpha, \beta, \phi, \ldots$
3. Junktoren:
   1. $\wedge$ Konjunktion (und)
   2. $\vee$ Disjunktion (oder)
   3. $\neg$ Negation (nicht)
   4. $\rightarrow$ Implikation
   5. $\leftrightarrow$ Äquivalenz
   6. **true** konstanter Wert
   7. **false** konstanter Wert

Aussagenlogische Formeln

Definition 1

Aussagenlogische Formeln über Atomen in V werden induktiv definiert:

1. Aussagenlogische Atome (Variablen) aus V sind Formeln.
2. Ist α eine Formel, dann ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3. Sind α und β Formeln, dann sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.
4. Formeln werden nur mit (1) bis (3) gebildet.

1. Die Menge der in einer Formel vorkommenden Atome wird mit $\mathit{atoms}(\alpha)$ bezeichnet.
2. α ist eine Formel über $\mathit{atoms}(\alpha)$.

Aussagenlogische Formeln

Definition 1

Aussagenlogische Formeln über Atomen in V werden induktiv definiert:

1. Aussagenlogische Atome (Variablen) aus V sind Formeln.
2. Ist α eine Formel, dann ist auch $(\neg\alpha)$ eine Formel.
3. Sind α und β Formeln, dann sind auch $(\alpha \wedge \beta)$ und $(\alpha \vee \beta)$ Formeln.
4. Formeln werden nur mit (1) bis (3) gebildet.

Beispiele:

1. $\alpha = ((\neg A) \vee (B \wedge (\neg B)))$ ist eine Formel.

2. $\beta = (((\neg(\neg A)) \vee B) \wedge (\neg X))$ ist eine Formel.

3. $\neg A$ ist (bisher) keine Formel, da Klammern fehlen.

4. $A \to B$ ist (bisher) keine Formel.

Bindungsregeln

Bindungsregeln dienen der Klammer-Ersparnis:

1. $\neg$ bindet stärker als $\wedge$
2. $\wedge$ bindet stärker als $\vee$
3. Bindungsregeln sind transitiv
4. Linksassoziativität für alle Junktoren: $A \wedge B \wedge C$ entspricht $((A \wedge B) \wedge C)$

Beispiele:

1. $\neg A \wedge B$ entspricht der Formel $((\neg A) \wedge B)$
2. $A \wedge B \vee \neg X$ entspricht $((A \wedge B) \vee (\neg X))$
3. $\neg\neg\neg A$ entspricht $(\neg(\neg(\neg A)))$
4. $A \wedge B \wedge C \vee X$ entspricht $(A \wedge B \wedge C) \vee X$

   $(A \wedge B \wedge C) \vee X$ entspricht $(((A \wedge B) \wedge C) \vee X)$

Aussagenlogische Formeln

Abkürzungen:

1. $\alpha \rightarrow \beta := \neg\alpha \vee \beta$
2. $\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$
3. **true** $:= A \vee \neg A$
4. **false** $:= A \wedge \neg A$

Bindungsregeln für (binäre) Abkürzungen:

1. $\vee$ bindet stärker als $\rightarrow$.
2. $\rightarrow$ bindet stärker als $\leftrightarrow$.

Binäre Operatoren gleicher Stärke werden als links geklammert angesehen. (linksassoziativ)

Semantik

Definition 2

Sei V eine Menge von Atomen (Variable). Eine Abbildung $I : V \longrightarrow \{w, f\}$ ist eine Bewertung. Eine Bewertung wird auch Interpretation genannt.

Definition 3

Bewertung von Formeln:
Sei I eine Bewertung von Atomen in V. Wir erweitern die Bewertung I auf Formeln über V wie folgt:

1. $I(\neg\alpha) = w$ genau dann, wenn $I(\alpha) = f$.
2. $I(\alpha \wedge \beta) = w$ genau dann, wenn $I(\alpha) = I(\beta) = w$.
3. $I(\alpha \vee \beta) = w$ genau dann, wenn $I(\alpha) = w$ oder $I(\beta) = w$.

Beispiel:

$\alpha = A \wedge (\neg A \vee B)$

Sei $I(A) = w$ und $I(B) = w$ eine Bewertung. Dann gilt $I(\alpha) = w$.

$I(\alpha) = w$ gdw. $I(A) = w$ und $I(\neg A \vee B) = w$

gdw. $I(A) = w$ und ($I(\neg A) = w$ oder $I(B) = w$).

gdw. $I(A) = w$ und ($I(A) = f$ oder $I(B) = w$).

Wahrheitstafel

Wir möchten wissen ob eine Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$ erfüllbar ist. Dazu erzeugen wir eine Wahrheitstabelle, in der wir die Bestandteile von α sukzessive auswerten.

A	B	C	$(A \vee B)$	$(\neg A \vee B)$	α
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Grundbegriffe

Definition 4

Sei α eine Formel.

1. α ist **erfüllbar** gdw. es eine Bewertung I mit $I(\alpha) = w$ gibt.
2. α ist eine **Tautologie** gdw. für alle Bewertungen $I(\alpha) = w$ gilt.
3. α ist **widerspruchsvoll** gdw. für alle Bewertungen $I(\alpha) = f$ gilt.
4. α ist **falsifizierbar** gdw. es eine Bewertung mit $I(\alpha) = f$ gibt.

Beispiele:

1. $A \vee \neg B$ ist erfüllbar, z.B. mit $I(A) = w, I(B) = w$
2. $A \vee \neg A$ ist eine Tautologie, d.h. wahr für alle Bewertungen.
3. $A \wedge \neg A$ ist widerspruchsvoll, d.h. falsch für alle Bewertungen.
4. $A \vee B$ ist falsifizierbar, z.B. durch $I(A) = I(B) = f$

Semantik

Satz 5

Sei α eine Formel.

α *ist widerspruchsvoll*
genau dann, wenn α *nicht erfüllbar ist*
genau dann, wenn $\neg\alpha$ *eine Tautologie ist.*

Beweis

Sei α *widerspruchsvoll, dann gilt für alle Bewertungen* $I(\alpha) = f$*. Damit gilt auch für alle Bewertungen* $I(\neg\alpha) = w$*.*
Also ist $\neg\alpha$ *eine Tautologie.*
Offensichtlich gibt es keine Bewertung, die α *wahr macht. Also ist* α *nicht erfüllbar.*

Semantische Folgerung

Definition 6

Sei M eine nicht-leere Menge von Formeln und β eine Formel.
β **folgt semantisch** aus M, in Zeichen $M \models \beta$, genau dann, wenn für alle Bewertungen I, für die $I(M) = w$ gilt, auch $I(\beta) = w$ gilt.
Enthält M nur eine Formel α, so schreiben wir auch $\alpha \models \beta$.
Ist M leer, dann folgt β gdw. β eine Tautologie ist. Dann schreiben wir $\models \beta$.

Schreibweise:
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Formeln, dann schreiben wir für $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ auch $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ und umgekehrt.

Semantische Folgerung

Satz 7

Seien α und β Formeln.

1. $\alpha \models \beta$ *gdw.* $\models \alpha \rightarrow \beta$ *gdw.* $\models \neg\alpha \vee \beta$
2. $\alpha \models \beta$ *gdw.* $\alpha \wedge \neg\beta$ *ist widerspruchsvoll.*
3. α *ist widerspruchsvoll gdw.* $\alpha \models \sigma$ *für alle Formeln* σ *gilt.*
4. α *ist widerspruchsvoll gdw. es ein Atom* A *mit* $\alpha \models (A \wedge \neg A)$ *gibt.*

Satz 8

Seien α, β und σ Formeln, dann gilt

1. $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$ *(Modus Ponens)*
2. $\alpha \to \beta, \beta \to \sigma \models \alpha \to \sigma$ *(Kettenregel)*
3. $(\alpha \vee \beta), (\neg\beta \vee \sigma) \models (\alpha \vee \sigma)$

Beweis

Ad 1: Sei I eine Bewertung mit $I(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) = w$. Zu zeigen: $I(\beta) = w$. Aus $I(\alpha \wedge (\alpha \to \beta)) = w$ ergibt sich $I(\alpha) = w$ und $I(\alpha \to \beta) = w$, und damit $I(\neg\alpha \vee \beta) = w$. Also gilt $I(\beta) = w$.

Ad 2: Sei I eine Bewertung mit $I((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \sigma)) = w$. Zu zeigen: $I(\alpha \to \sigma) = w$.
Fallunterscheidung:
Fall 1: $I(\beta) = w$, dann muss $I(\sigma) = w$ gelten wegen $I(\beta \to \sigma) = w$.
Fall 2: $I(\beta) = f$, dann muss $I(\alpha) = f$ wegen $I(\alpha \to \beta) = w$ gelten.

q.e.d.

Logische Äquivalenz

Definition 9

Zwei Formeln α und β sind **logisch äquivalent**, in Zeichen $\alpha \approx \beta$, genau dann, wenn für alle Bewertungen $I(\alpha) = I(\beta)$ gilt.

Satz 10

Seien α und β Formeln, dann gilt:
$\alpha \approx \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ gilt.

Umformungsregeln - Teil 1

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Es gelten folgende Regeln:

Negation	$\neg\neg\alpha \approx \alpha$
Idempotenz	$\alpha \vee \alpha \approx \alpha$
	$\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$
Neutrales Element	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta \approx \beta$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \wedge \beta \approx \beta$
Kontradiktion/Tautologie	$(\alpha \wedge \neg\alpha) \wedge \beta \approx \alpha \wedge \neg\alpha$
	$(\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \approx \alpha \vee \neg\alpha$

Die Gültigkeit der Regeln lässt sich leicht mit Wahrheitstafeln zeigen.

Umformungsregeln - Teil 2

Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Es gelten folgende Regeln:

Kommutativität	$\alpha \vee \beta \approx \beta \vee \alpha$
	$\alpha \wedge \beta \approx \beta \wedge \alpha$
Assoziativität	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \approx \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \approx \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
Distributivität	$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \approx (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$
	$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \approx (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$
De Morgan	$\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$
	$\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$
Absorption	$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \approx \alpha$
	$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \approx \alpha$

Die Gültigkeit der Regeln lässt sich leicht mit Wahrheitstafeln zeigen.

Normalformen

Definition 11

Negationsnormalform (NNF)
Eine Formel α (ohne Implikations- und Äquivalenzzeichen) ist in **Negationsnormalform** (NNF) genau dann, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Beispiel:
1. $(\neg X \vee Y) \wedge (\neg A \vee B)$ ist in NNF
2. $\neg\neg A$ und $\neg(A \vee B)$ sind nicht in NNF

Normalformen

Definition 11

Negationsnormalform (NNF)
Eine Formel α (ohne Implikations- und Äquivalenzzeichen) ist in **Negationsnormalform** (NNF) genau dann, wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Beispiel:
1. $(\neg X \vee Y) \wedge (\neg A \vee B)$ ist in NNF
2. $\neg\neg A$ und $\neg(A \vee B)$ sind nicht in NNF

Satz 12

Zu jeder Formel α gibt es eine äquivalente Formel β in NNF.

Transformation:

1. Ersetze Teilformeln $\neg\neg\sigma$ durch σ (Negation).
2. Ersetze Teilformeln $\neg(\sigma \vee \beta)$ durch $(\neg\sigma \wedge \neg\beta)$ (de Morgan).
3. Ersetze Teilformeln $\neg(\sigma \wedge \beta)$ durch $(\neg\sigma \vee \neg\beta)$ (de Morgan).

Normalformen

Definition 13

Literal: negiertes oder nicht-negiertes Atom
positives Literal: Atom, z.B. A
negatives Literal: negiertes Atom, z.B. $\neg A$
Klausel: Disjunktion von Literalen, z.B. $(A \vee B \vee \neg D)$
k-Klausel: Klauseln, die maximal k Literale enthalten
Unit-Klausel: Klausel, die aus einem Literal besteht

Definition 14

Konjunktive Normalform (KNF)
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Klauseln. Dann ist $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ in konjunktiver Normalform (KNF). Eine Formel ist in KNF genau dann, wenn sie aus einer Konjunktion von Klauseln besteht.

Alternative Schreibweise: Sei $\alpha = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ in KNF, dann schreiben wir auch $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.
Beispiel: $\alpha = \{(A \vee \neg B), (\neg A \vee D)\}$

Satz 15

Zu jeder Formel α gibt es eine logisch äquivalente Formel β in KNF.

Transformation:

1. Transformiere α in eine äquivalente Formel σ in NNF.
2. Wende auf σ evtl. mehrfach das Distributivgesetz an.

Beispiel:

1. $\neg(A \wedge (\neg B \vee \neg(\neg C \wedge E) \vee A))$
2. $\neg A \vee \neg(\neg B \vee \neg(\neg C \wedge E) \vee A)$ NNF-Schritt
3. $\neg A \vee (B \wedge (\neg C \wedge E) \wedge \neg A)$ in NNF
4. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee (\neg C \wedge E)) \wedge (\neg A \vee \neg A)$ Distributivgesetz
5. $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee E) \wedge (\neg A \vee \neg A)$ Distributivgesetz

Länge der Formel

Definition 16

Die Länge einer Formel α, in Zeichen $|\alpha|$, ist die Anzahl der Atomvorkommen in α.

Beispiel:
$|\neg\neg A| = 1$ und $|A \vee (A \wedge B)| = 3$

Satz 17

Es gibt aussagenlogische Formeln α_n der Länge $2n$, zu der jede logisch äquivalente Formel in KNF mindestens die Länge 2^n besitzt.

Disjunktive Normalform

Definition 18

Eine Formel $\alpha = (L_1 \wedge \ldots \wedge L_n)$ mit Literalen $L_1, \ldots, L_n$ wird als **Monom** bezeichnet.
Ein Monom mit maximal k Literalen bezeichnen wir als k-**Monom**.
Eine Formel α ist in disjunktiver Normalform (DNF) genau dann, wenn α eine Disjunktion von Monomen ist. ($\alpha = \alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$ und α_i ist ein Monom für $1 \leq i \leq n$.)

Satz 19

Zu jeder Formel gibt es eine logisch äquivalente Formel in DNF.