

Übersicht

Grundlagen für alle anderen formalen Kalküle

- 1 Mengen
- 2 Induktive Definitionen, induktive Beweise
- 3 Potenzmengen
- 4 Kartesisches Produkt, Tupel
- 5 Folgen
- 6 Relationen
- 7 Funktionen

Mengen

Mengen: Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, den Elementen der Menge. „ a ist Element der Menge“ schreiben wir als $a \in M$.

$M = \{a, b, c\}$, a , b und c sind die Elemente der Menge M

$M = \{\text{wert}, (a, c)\}$, die Elemente sind wert und (a, c)

$M = \{\{a\}, \{b, \{c, a\}\}\}$, die Elemente sind $\{a\}$ und $\{b, \{c, a\}\}$

Definition 1

Die leere Menge wird mit \emptyset oder $\{\}$ bezeichnet.

Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt **Kardinalität** von M . Dafür schreiben wir auch $\text{Card}(M)$ oder $|M|$.

Beispiel: $|\{a, b, c\}| = 3$ und $|\emptyset| = 0$

Vereinbarung: Die natürlichen Zahlen \mathbb{N} beginnen mit der Zahl 1, also

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Wenn wir die 0 dazunehmen möchten, dann schreiben wir \mathbb{N}_0 .

Russels Paradoxon

Sei P die Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, also $P = \{x : x \notin x\}$.

Dann führt die Frage „Ist P Element von P ?“ zum Widerspruch.

Fall 1: Sei P ein Element der Menge P . Dann gilt nach Definition $P \notin P$, also ein Widerspruch.

Fall 2: Sei P kein Element von P , also $P \notin P$ und damit nach Definition $P \in P$. Dieser Fall ist auch nicht möglich.

Der Widerspruch läßt sich durch folgende Annahme vermeiden:

Im weiteren gehen wir immer davon aus, dass eine Grundmenge bekannt ist, aus der die Elemente der Mengen stammen.

Definition 2

- ① $M \subseteq N$: M ist Teilmenge von N gdw.
für alle $a \in M$ auch $a \in N$ gilt.
- ② $M = N$: M und N sind gleich gdw.
 $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ gilt.
- ③ $M \subset N$: M ist echte Teilmenge von N gdw.
 $M \subseteq N$ und $M \neq N$ gilt.
- ④ $M \cup N := \{x : x \in M \text{ oder } x \in N\}$ (Vereinigung)
- ⑤ $M \cap N := \{x : x \in M \text{ und } x \in N\}$ (Durchschnitt)
- ⑥ $M \setminus N := \{x : x \in M \text{ und } x \notin N\}$ (Differenz)
- ⑦ M und N sind **disjunkt** genau dann, wenn gilt $M \cap N = \emptyset$.

Definition von Mengen

- 1 **extensionale** Definition: Angabe der Elemente
Beispiel: $M := \{x, y, a, d\}$
- 2 **intensionale** Definition: Angabe einer Eigenschaft $M := \{a : E(a)\}$
Beispiel für $E(x)$: $x \in \mathbb{N}$ und x ist Quadratzahl und $x \leq 30$
$$M := \{x : E(x)\} = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ ist Quadratzahl}, x \leq 30\}$$
- 3 **induktive** Definition:
Ausgehend von Anfangselementen werden mit Regeln weitere Elemente bestimmt.

Beispiel:

Anfangselemente: $2, 3 \in M$.

Regel: Falls $x \in M$, dann auch $x + 4 \in M$.

Nur so gebildete Zahlen sind in M .

Induktive Definitionen

Induktive Definition einer Menge M :

(1) Anfangselemente: $c_1, \dots, c_k \in M$

(2) Folgeelemente:

f_1, \dots, f_r seien feste s -stellige Funktionen

▶ seien $x_1, \dots, x_s \in M$, dann ist auch $f_1(x_1, \dots, x_s) \in M$

▶ ...

▶ ...

▶ seien $x_1, \dots, x_s \in M$, dann ist auch $f_r(x_1, \dots, x_s) \in M$

(3) Nur die mit (1) und (2) erzeugten Elemente gehören zu M .

Beispiele für induktiv definierte Mengen

Natürliche Zahlen:

Anfangselement: $1 \in M$

Folgeelemente: $x \in M$, dann ist auch $x + 1 \in M$

Menge von Zahlen:

Anfangselemente: $3, 5 \in M$

Folgeelemente:

$x \in M$, dann ist auch $x + 4 \in M$

$x \in M$, dann ist auch $x + 5 \in M$

Menge von Worten:

Anfangselemente: $aac, abaa \in M$

Folgeelemente:

1. $w_1, w_2 \in M$, dann auch $aw_1baw_2 \in M$

2. $w \in M$, dann auch $aw \in M$

Induktionsbeweise: Natürliche Zahlen

Satz 3

Für alle $n \geq 1$ gilt die Eigenschaft $E(n)$.

Für alle $n \geq 1$ gilt $n^2 \geq n$. Die Eigenschaft ist $E(n)$ ist $n^2 \geq n$.

Beweis

- 1 Induktionsanfang (IA): Zeige die Eigenschaft $E(n)$ für $n = 1$
Es gilt offensichtlich $1^2 = 1$. Also ist der Induktionsanfang gezeigt.
- 2 Induktionsschritt (IS): ($n \rightarrow n + 1$)
Zeige, dass die Eigenschaft $E(n + 1)$ gilt, wobei ausgenutzt werden kann, dass die Induktionsvoraussetzung (IV) $E(n)$ gilt.
Es ist zu zeigen, dass $(n + 1)^2 \geq (n + 1)$ gilt. Die Induktionsvoraussetzung ist $n^2 \geq n$.
Es gilt $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Mit der Induktionsvoraussetzung erhalten wir
 $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq_{IV} n + 2n + 1 \geq n + 1$.
- 3 Den Beweis beenden wir mit q.e.d.

Induktionsbeweise: Induktiv definierte Mengen

Satz 4

Für alle $x \in M$ gilt $E(x)$.

M sei induktiv definiert.

Beweis

- 1 *Induktionsanfang (IA): Zeige die Eigenschaft E für alle Anfangselemente von M .*
- 2 *Induktionsschritt (IS): (Regelanwendungen)
Zeige für jede Regel: „ $x_1, \dots, x_s \in M$ dann auch $f_i(x_1, \dots, x_s) \in M$ “, dass die Eigenschaft $E(f_i(x_1, \dots, x_s))$ gilt.
Die Induktionsvoraussetzung (IV), die für den Beweis ausgenutzt werden kann, ist, dass $E(x_1), \dots, E(x_s)$ gilt.*
- 3 *Den Beweis beenden wir mit q.e.d.*

Anfangselemente: $aac, abaa \in M$

Folgeelemente: 1. $w_1, w_2 \in M$, dann auch $aw_1baw_2 \in M$

2. $w \in M$, dann auch $aw \in M$

Satz 5

Jedes Wort aus M enthält mehr Buchstaben a als Buchstaben b .

Beweis

Induktionsbeweis

Induktionsanfang (IA): Offensichtlich gilt für die Anfangselemente aac und $abaa$ die Eigenschaft.

Induktionsschritt (IS):

Regel 1: Sei $v \in M$ mit der Regel 1 erzeugt, also $v = aw_1baw_2$. Die Induktionsvoraussetzung (IV) ist, dass die Eigenschaft für w_1 und w_2 gilt. Dann gilt offensichtlich auch die Eigenschaft für v .

Regel 2: Sei $v \in M$ mit der Regel 2 erzeugt, also $v = aw$. Die IV ist, dass die Eigenschaft für w gilt. Es gilt dann auch die Eigenschaft für v .

q.e.d.

Potenzmenge

Definition 6

Sei M eine Menge, dann ist die Potenzmenge (power set) von M definiert als $\text{Pow}(M) := \{U : U \subseteq M\}$.

Beispiel:

① $M = \{a, b\}$

$\text{Pow}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, \emptyset ist die leere Menge.

② $M = \emptyset$, dann ist $\text{Pow}(M) = \{\emptyset\}$

Kardinalität der Potenzmenge

Satz 7

Sei M eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen. Dann ist die Kardinalität von $\text{Pow}(M)$ gleich 2^n . (auch geschrieben als $|\text{Pow}(M)| = 2^n$)

Beweis

Induktion über n .

(IA) $n = 1$. Für $M = \{a\}$ gilt $\text{Pow}(M) = \{\phi, \{a\}\}$ und damit

$$|\text{Pow}(M)| = 2 = 2^1$$

(IS) Zeige $|\text{Pow}(M)| = 2^{n+1}$ für Mengen mit $|M| = n + 1$.

Die IV gilt für alle Mengen mit n Elementen.

Sei $M = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, dann gilt

$$\text{Pow}(M) = \text{Pow}(M \setminus \{x_0\}) \cup \{U \cup \{x_0\} : U \in \text{Pow}(M \setminus \{x_0\})\}.$$

Nach IV gilt $|\text{Pow}(M \setminus \{x_0\})| = 2^n$. Damit erhalten wir

$$|\text{Pow}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

q.e.d.

Kartesisches Produkt

Definition 8

Für $n \geq 2$ seien M_1, \dots, M_n nicht-leere Mengen. Dann ist das kartesische Produkt definiert als

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in M_i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

(a_1, \dots, a_n) wird als n -Tupel bezeichnet.

Für $M = M_1 = \dots = M_n$ schreiben wir auch $M^n = M \times \dots \times M$.

Weitere Vereinbarung:

$$\bullet M^1 := \{(x) : x \in M\}$$

Achtung:

$A \times (B \times C) \neq A \times B \times C$, da $(a, (b, c)) \in A \times (B \times C)$, aber nicht in $A \times B \times C$.

Kartesisches Produkt

Satz 9

Sei $n \geq 2$ und seien M_1, \dots, M_n endliche nicht-leere Mengen. Dann gilt für die Kardinalität $|M_1 \times \dots \times M_n| = \prod_{1 \leq i \leq n} |M_i|$.

Für M^n gilt $|M^n| = |M|^n$.

Beweis durch Induktion über n .

Beispiel: Sei $M = \{0, 1\}$; wie viele n -Tupel über M gibt es?

Also wie groß ist $|\{0, 1\}^n|$?

Es gilt $|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n$ und damit $|\{0, 1\}^n| = 2^n$

Endliche Folgen

Definition 10

Sei A eine Menge, dann ist definiert

$A^0 := \{\varepsilon\}$, ε ist die leere Folge,

die leere Folge wird manchmal auch mit $()$ bezeichnet.

$A^1 := \{(a) : a \in A\}$, die Menge der einelementigen Folgen

$A^n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$, die n -elementigen Folgen
(n -elementige Tupel) für $n \geq 1$

$A^+ := \{x : x \in A^i \text{ für } i \geq 1\}$ (ohne die leere Folge)

$A^* := A^+ \cup A^0$ alle endlichen Folgen inklusive der leeren Folge.

Beispiel: Buchstaben $:= \{a, b, c, \dots, z\}$, Dann besteht Buchstaben^+ aus allen nicht-leeren Folgen (Tupeln); z.B. $(s, e, m, e, s, t, e, r) \in \text{Buchstaben}^+$.

Relationen

Definition 11

Sei $n \geq 1$ und seien M_1, \dots, M_n Mengen. Eine Teilmenge $R \subseteq M_1 \times \dots \times M_n$ wird auch Relation genannt.

Beobachtungen:

- ➊ Sprechweise: Sei $(x_1, \dots, x_n) \in R$, R gilt für das Tupel (x_1, \dots, x_n) .
- ➋ Schreibweisen: $(x_1, \dots, x_n) \in R$ oder $R(x_1, \dots, x_n)$
- ➌ Zweistellige Relationen: $(a, b) \in R$ oder aRb oder $R(a, b)$

Beispiele:

a) Gültig \subseteq Daten, Daten = Tage \times Monate \times Jahre

$(1, \text{Mai}, 2013) \in \text{Gültig}$, $\text{Gültig}(31, \text{Februar}, 2000)$ gilt nicht.

b) $7 \leq 9$, $4 = 4$ mit „ \leq “, „ $=$ “ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

c) Student \subseteq Name \times Fach \times Stadt

Student(Müller, Informatik, Paderborn), Student(Meier, Physik, München)

Eigenschaften zweistelliger Relationen $R \subseteq M \times M$

- ① **reflexiv**: für alle $x \in M$: xRx
- ② **irreflexiv**: es gibt kein $x \in M$ mit xRx
- ③ **symmetrisch**: für alle $x, y \in M$: xRy genau, dann wenn yRx .
- ④ **transitiv**: für alle $x, y, z \in M$: wenn xRy , yRz , dann xRz
- ⑤ **asymmetrisch**: für alle $x, y \in M$: xRy gilt nicht, falls yRx gilt.
- ⑥ **alternativ**: für alle $x \neq y \in M$: entweder xRy oder yRx .
- ⑦ **antisymmetrisch**: für alle $x, y \in M$: wenn xRy und yRx , dann $x = y$.

Eigenschaften zweistelliger Relationen $R \subseteq M \times M$

Definition 12

Eine zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ wird Äquivalenzrelation genannt genau dann, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Beispiele:

- 1 „ $=$ “ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die Gleichheit für \mathbb{N} ist eine Äquivalenzrelation.
- 2 „ \leq “ $\subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist **keine** Äquivalenzrelation
- 3 $R \subseteq \{a, b, c, t\}^2$ mit $R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (c, c), (b, a), (t, t)\}$ ist eine Äquivalenzrelation.

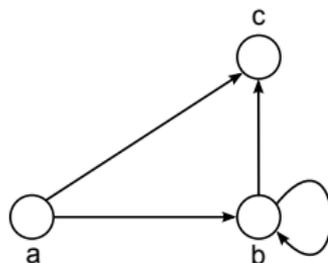
Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 13 (Gerichteter Graph)

Ein gerichteter Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer endlichen Menge von Knoten V (engl. Vertices) und einer endlichen Menge von Kanten $E \subseteq V \times V$ (engl. Edges).

Eine Kante (x, x) heißt Schleife.

Beispiel: $G = (\{a, b, c\}, \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, b)\})$

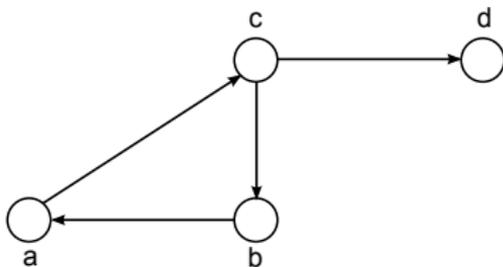
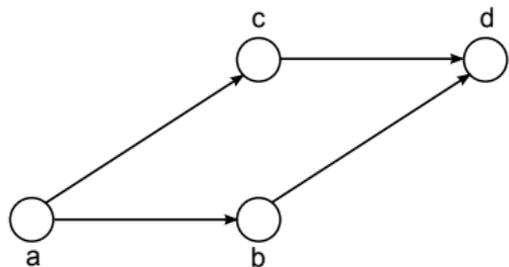


Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 14

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Eine Folge von Knoten (v_0, v_1, \dots, v_n) mit $n \geq 1$ und $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $0 \leq i \leq n - 1$ heißt **Weg** von v_0 nach v_n .

Ein Graph heißt **zyklenfrei**, wenn es für keinen Knoten x einen Weg von x nach x gibt.



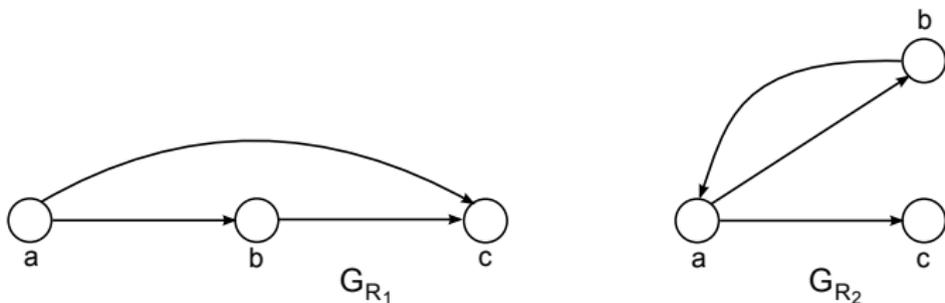
Graphen als spezielle zweistellige Relationen

Definition 15

Sei $R \subseteq M \times M$ eine zweistellige Relation über der endlichen Menge M . Sei $G_R := (V, E)$ mit $V := M$ und $E := R$, dann **repräsentiert** G_R die Relation R .

Sei $R_1, R_2 \subseteq \{a, b, c\}^2$ mit $R_1 = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$ und $R_2 := \{(a, b), (b, a), (a, c)\}$.

Dann ist G_{R_1} zyklensfrei, aber G_{R_2} enthält den Zyklus (a, b, a) .



Eigenschaften zweistelliger Relationen in Graphen

Sei $R \subseteq M^2$ eine zweistellige Relation:

- 1 R reflexiv: zu jedem $x \in M$ gibt es eine Kante $(x, x) \in E$
- 2 R transitiv: zu den Kanten (x, y) und (y, z) gibt es auch eine Kante (x, z) .
- 3 R irreflexiv: es gibt keine Kante (x, x) in E .
- 4 R alternativ: für verschiedene Knoten x und y gibt es entweder eine Kante (x, y) oder eine Kante (y, x) .
- 5 R symmetrisch: zu jeder Kante $(x, y) \in E$ gibt es auch die Kante (y, x) in E .

Ordnungsrelationen

Definition 16

Sei $R \subseteq M^2$ eine zweistellige **transitive** Relation

- 1 **partielle Ordnung (Halbordnung)**: R ist reflexiv und antisymmetrisch
- 2 **strenge Ordnung (strenge Halbordnung)**: R ist irreflexiv
- 3 **Quasiordnung**: R ist reflexiv
- 4 **totale oder lineare Ordnung**: R ist alternativ, reflexiv und antisymmetrisch

Beobachtung:

1. Die „ \leq “-Relation über natürlichen Zahlen ist eine totale Ordnung.
2. Die Gleichheit „ $=$ “ über natürlichen Zahlen ist keine totale Ordnung.

Definition 17

Eine Funktion f ist eine zweistellige Relation $f \subseteq D \times B$ für die gilt: Wenn $(x, y) \in f$ und $(x, z) \in f$, dann $y = z$.

D ist der Definitionsbereich von f und B ist der Bildbereich von f .

Mit $D \rightarrow B$ bezeichnen wir die Menge aller Funktion von D nach B .

Wir sagen auch: f hat die **Signatur** $D \rightarrow B$ oder $f : D \rightarrow B$.

Notation:

- 1 Schreibweisen: $f(x) = y$, $(x, y) \in f$, xfy
- 2 $G_f := \{(x, y) : f(x) = y\}$ wird auch als Graph von f bezeichnet.
- 3 $f : D \rightarrow B$ heißt
 n -stellig, falls $D = M_1 \times \dots \times M_n$ mit $n > 1$.
1-stellig, falls D kein kartesisches Produkt und nicht leer ist.
- 4 Sonderfall: 0-stellig, $f() = b$. Wir sagen auch, dass f die Konstante b ist.

Eigenschaften von Funktionen

Eine Funktion f heißt

- ➊ **total**: für alle $x \in D$ gibt es ein y mit $f(x) = y$ (f vollständig definiert).
- ➋ **partiell**: es wird nicht verlangt, dass f für alle $x \in D$ definiert ist.
- ➌ **surjektiv**: für alle $y \in B$ gibt es ein $x \in D$ mit $f(x) = y$.
- ➍ **injektiv**: für alle $y \in B$ gibt es höchstens ein x mit $f(x) = y$.
- ➎ **bijektiv**: f ist injektiv und surjektiv.

Satz 18

Für endliche D und B gibt es $(|B|)^{|D|}$ totale Funktionen $f : D \rightarrow B$.
Die Anzahl der partiellen Funktionen $f : D \rightarrow B$ ist $(|B| + 1)^{|D|}$.

Beweis durch Induktion

Schreibweise: $|D \rightarrow B|$ ist die Kardinalität, also die Anzahl der totalen Funktionen von D nach B .

Spezielle Funktionen

- 1 Identitätsfunktion: $id_M : M \rightarrow M$ mit $id_M(x) = x$
- 2 Charakteristische Funktion einer Menge $M \subseteq U$:
kennzeichnet die Elemente aus U , die in M enthalten sind.
 $\chi_M : U \rightarrow \{0, 1\}$ mit $\chi_M(x) = 1$, falls $x \in M$ und 0 sonst.
- 3 Boolesche Funktionen: $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$
Idee: 0 steht für falsch, 1 steht für wahr.

Anzahl Boolescher Funktionen

Satz 19

Es gibt $2^{(2^n)}$ totale Boolesche Funktionen $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Beweis

Induktion über $n \geq 1$.

(IA) $n = 1$, also $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$. Es gibt $4 = 2^2$ Möglichkeiten.

(IS) ($n \rightarrow n + 1$);

Nach IV gibt es $2^{(2^n)}$ verschiedene Funktionen $g : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

$g(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n, 0)$ und $h(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n, 1)$.

Dann gibt es nach der IV jeweils $2^{(2^n)}$ viele Funktionen g und h .

f besteht aus der Kombination von g und h .

Also insgesamt gibt es $2^{(2^n)} \cdot 2^{(2^n)} = 2^{(2^{n+1})}$ viele totale Boolesche

Funktionen $f : \{0, 1\}^{n+1} \rightarrow \{0, 1\}$.

q.e.d.