

Modellierung – WS 2015/2016

Präsenzübung 8

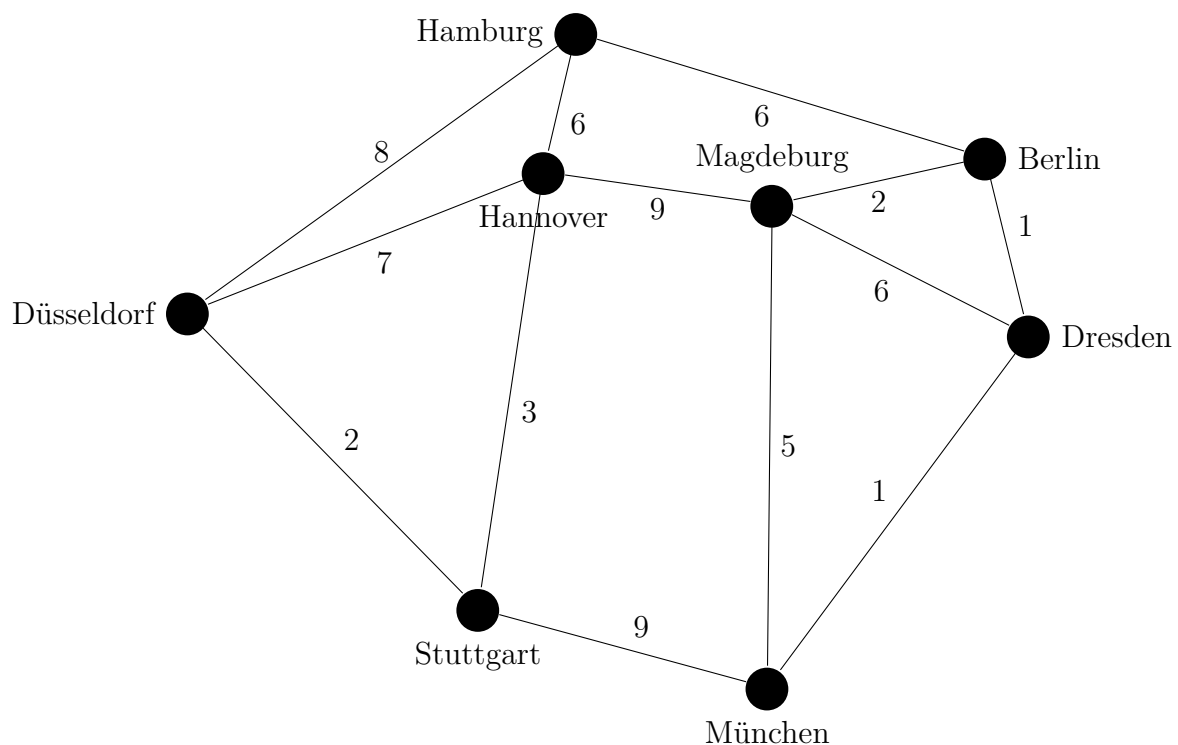
14. - 18. Dezember 2015

(Dieser Übungszettel besteht aus 5 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (Graphen, Modellierung)

Ein großer Streitpunkt in der großen Koalition ist die PKW Maut. Der folgende Graph $G = (V, E)$ mit Kantenmarkierung $m : E \rightarrow \mathbb{Q}$ stellt das Straßennetz Deutschlands dar.



Dabei stellt eine Kante eine Straße dar. Die Kantenmarkierung beschreibt die geplante Maut auf dieser Strecke.

1. Mit welchen Einnahmen kann Schäuble pro Jahr rechnen, wenn jede Straße jährlich von mindestens 10 Millionen Autos befahren wird.
 - (a) Geben Sie eine allgemeine Formel an, mit der die Kosten berechnet werden können.
 - (b) Berechnen Sie die Kosten für eine Rundreise zwischen den Städten der neuen Bundesländer.

2. Wie teuer ist die günstigste Verbindung von Berlin nach München? Geben Sie diese Verbindung als Weg im Graphen an.

3. Dobrindt steht in der Kritik, die Ausgaben für die Maut könnten die entstehenden Einnahmen übersteigen. Deshalb schlägt er vor, günstige Straßen Schritt für Schritt still zu legen. Dabei soll stets die Straße mit den geringsten Mauteinnahmen geschlossen werden. Eine Straße wird aber nur still gelegt, wenn jede Stadt von allen anderen Städten erreichbar bleibt.

Geben Sie die Folge der entfernten Kanten an und zeichnen Sie den resultierenden Teilgraphen G' von G .

4. Leider hat Dobrindt die Rechnung ohne seinen Parteikollegen und Förderer gemacht. Seehofer sind die Reisen von München nach Berlin nun zu weit (und zu teuer).

Erweitern Sie das Verkehrsnetz so durch zwei neue Straßen zu einem Graphen \tilde{G} mit Straßen \tilde{E} , dass alle Städte untereinander durch Wege der Länge maximal 3 erreichbar sind.

5. Dobrindt möchte Seehofers Plan noch in diesem Jahr umsetzen. Er plant bereits eine große PR-Kampagne. Dazu möchte er auf den Straßen aus \tilde{E} durch die BRD reisen und jede Straße genau einmal befahren.

Untersuchen Sie, ob dies möglich ist. Falls ja, dann schlagen Sie Start und Zielort vor. Argumentieren Sie graphentheoretisch.

Aufgabe 2 (Beweisen)

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die folgende Aussage.

Jeder Graph mit $n \geq 2$ Knoten enthält mindestens zwei Knoten mit gleichem Grad.

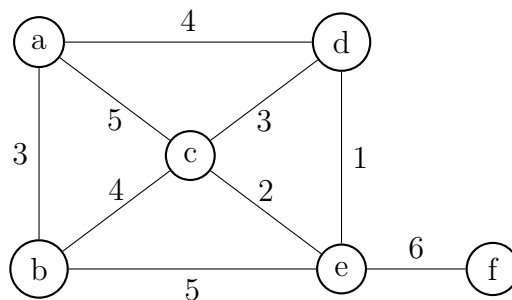
Aufgabe 3 (Graphen, Beweisen)

Beweisen Sie: Für $d \geq 2$ enthält der Graph Q_d für jedes $2 \leq i \leq d$ jeweils mindestens einen einfachen Kreis der Länge $2 \cdot i$.

Hinweis: Q_d bezeichnet den d -dimensionalen Hyperwürfel.

Aufgabe 4 (Spannbäume)

Gegeben sei folgender Graph:



Geben Sie alle minimalen Spannbäume des Graphen sowie deren Gewicht an.

Aufgabe 5 (Graphen, Beweisen)

Eine Brückenkante eines Graphen ist eine Kante, deren Entfernen zu einem Graphen führt, der mehr Zusammenhangskomponenten enthält als der ursprüngliche Graph. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1. $e \in E$ ist eine Brückenkante.
2. $\exists a, b \in V$ mit $a \neq b$, so dass jeder Weg in G von a nach b über e geht.