Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

13. November 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Präsenzübung 4
16. - 20. November 2015
(Dieser Übungszettel besteht aus 4 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors, das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (Äquivalenz)
Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils an, ob diese erfüllbarkeits-äquivalent oder äquivalent sind. Beweisen Sie Ihre Antwort in geeigneter Weise.

1. $\alpha = A \wedge B$ und $\beta = C \wedge D$
2. $\alpha = A \vee B \wedge C$ und $\beta = A \wedge B \vee C$
3. $\alpha = A \rightarrow B$ und $\beta = B \rightarrow A$
4. $\alpha = A$ und $\beta = \neg A$
5. $\alpha = A \wedge B \wedge (B \rightarrow (\neg B))$ und $\beta = A \wedge (B \rightarrow (\neg B))$
6. $\alpha = (A \wedge B) \vee C)$ und $\beta = (A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (E \rightarrow (A \vee E))$
7. $\alpha = \Big(((A \rightarrow B) \vee A) \wedge B\Big) \rightarrow (E \vee A \wedge (\neg A \vee E))$ und $\beta = B \rightarrow E$.

Aufgabe 2 (Transformation,PS-Graphen)
Gegeben seien die folgenden aussagenlogischen Formeln. Transformieren Sie diese zunächst in NNF. Stellen Sie den dazugehörigen PS-Graphen auf. Generieren Sie dann eine Formel in KNF, die erfüllbarkeits-äquivalent zu der Ausgangsformel ist.

1. $\alpha = ((A \wedge B) \wedge C) \vee (A \vee (B \wedge C))$
2. $\alpha = A \leftrightarrow B$
3. $\alpha = A \wedge B \vee A \wedge C \vee B \wedge C \vee A \wedge \neg D$

Aufgabe 3 (Horn-Formeln,Unit-Resolution)

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Formeln Horn-Formeln sind.
   a) $\alpha = (A \vee B \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B)$.
   b) $\alpha = (\neg A \vee B \vee \neg C) \vee (A \wedge (C \vee \neg B))$.

c) $\alpha = (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge \neg A$

2. Gegeben Sei eine Horn-Formel α, die keine Klauseln mit weniger als 2 Literalen enthält. Zeigen Sie, dass α dann erfüllbar ist.

3. Gegeben sei jeweils die Menge M an aussagenlogischen Formeln und die Formel β. Prüfen Sie, ob $M \models \beta$ gilt. Stellen Sie dazu die äquivalente Horn-Formel auf und wenden Sie gegebenenfalls Unit-Resolution an.

   a) $M = \{(A \vee B \wedge C) \to (C \wedge \neg D), (C \wedge D) \to A, (C \vee B) \to A\}$, $\beta = \neg A \wedge B$.

   b) $M = \{(A \vee B) \to C, (C \vee D) \to E, (A \wedge E) \to B\}$, $\beta = A$.

   c) $M = \{(A \vee B) \to C, (C \vee D) \to E, (A \wedge E) \to B\}$, $\beta = \neg A$.

Aufgabe 4 (Formeln, Prädikatenlogik)
Bearbeiten Sie die folgenden Punkte für jede der gegebenen Formeln.

- Handelt es sich um eine Formel in PL1? Wenn nicht, dann überführen Sie die Formel durch Einfügen oder Löschen geeigneter Zeichen in eine Formel in PL1.
- Kennzeichnen Sie anschließend alle freien Variablen.
- Kennzeichnen Sie alle gebundenen Variablen, indem Sie diese mit dem dazugehörigen Quantor verbinden.
- Geben Sie jeweils eine mögliche Interpretation an. Wählen Sie dazu einen Grundbereich ω und ordnen Sie den Elementen aus Σ und V Objekte der richtigen Stelligkeit über dem Grundbereich ω zu.
- Führen Sie eine konsistente Umbenennung durch.

1. $P(x) \to \forall x \ \Big(\exists x, y \ \big(\neg R(a, y) \wedge \big(S(z, Q(x))\big) \wedge \big(T(y) \wedge P(y)\big)\big)\Big)$
2. $\forall x \forall y \ \Big(G\big(k(f(x,y)), f(k(x), k(y))\big) \wedge G\big(k(f_2(x,y)), f(k(x), k(y))\big)\Big)$
3. $\forall s \ \big(\exists t \ (P(s) \wedge t(s))\big)$
4. $\exists x \forall y \ (Q(x,y)) \wedge \exists x \ P(x,y)$
5. $\forall x \ (P(x,y) \vee \exists \neg y \ P(x,y))$
6. $\exists x \exists y \ \Big(\big(P(x) \to \forall x \ (Q(x,y,z))\big) \to \exists S(x,y)\Big)$