Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

23. Oktober 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Präsenzübung 1
26. - 30. Oktober 2015
(Dieser Übungszettel besteht aus 7 Aufgaben)

Hinweis: In der Präsenzübung haben Sie die Möglichkeit unter Anleitung Ihres Tutors das Entwickeln von Lösungen zu üben und Ihre Fragen zu klären. Jeder Präsenzübungszettel enthält eine große Auswahl an Aufgaben, von denen ein Teil in der Präsenzübung besprochen wird. Es ist *nicht* das Ziel der Präsenzübung "Musterlösungen" zu verteilen.

Aufgabe 1 (Extensionale Darstellung)
Beschreiben Sie die folgenden intensional definierten Mengen jeweils mit einem Satz und geben Sie zu jeder Menge die entsprechende extensionale Definition an.

1. $M := \{(i,j) : \ i \in \mathbb{Z} \wedge j \in \mathbb{Z} \wedge j = i^2 \wedge j < 10\}$
2. $M := \{b \ : \ b \in \mathbb{Z} \wedge 2b^2 + b - 6 = 0\}$
3. $M := \{(x,y) : x, y \in \mathbb{N} \text{ und } x \cdot y = 24 \text{ und } x < y\}$
4. $M := \{(i,j) \ : \ i,j \in \mathbb{N} \wedge 3 < i \wedge i + 1 = j \wedge j < 10\}$
5. $M := \{(x,y) : \ x, y \in \mathbb{N} \wedge x \cdot y < 20 \wedge x < y\}$.
6. $M := \{(i,j) \ : \ i,j \in \mathbb{N} \wedge i \leq 8 \wedge j = 2^i\}$
7. $M := \{\{m,n\} \ : \ m,n \subseteq \{1,2,3,4\} \wedge m \cup n = \{1,2,3,4\} \wedge m \cap n = \emptyset\}$
8. $M := Pow(\{Salz, Pfeffer\}) \times \{Spiegelei, Steak, Salat\}$
9. $M := \{Kopf, Zahl\}^3$
10. $M := \{(i,j) : i \in \mathbb{N}_0 \text{ und } j \in \mathbb{N}_0 \text{ und } j = \sqrt{i} \text{ und } i < 10\}$

Aufgabe 2 (Intensionale Darstellung)
Geben Sie zu jeder Menge die entsprechende intensionale Definition an.

1. Die Menge M geordneter Paare natürlicher Zahlen, deren Produkt kleiner als 7 ist.
2. Die Menge M der natürlichen Zahlen, deren Wurzel kleiner als 20 ist.
3. Die Menge M geordneter Paare ganzer Zahlen, deren Summe nicht größer als 20 ist.
4. Die Menge M der positiven Teiler der Zahl 18.
5. $M := \{(3,27), (1,1), (4,256), (2,4)\}$.

6. $M := \{(1,1),(2,8),(3,27),(4,64),(5,125)\}$

Aufgabe 3 (Mengenoperationen, Kardinalitäten, extensionale Darstellung)
Seien $M := \{b, c\}$ und $N := \{1, 2, 3\}$. Schreiben Sie die folgenden Mengen in extensionaler Form auf und geben Sie ihre Kardinalität an.

1. $A := \{x : x \in N \text{ und } x > 1\}$
2. $B := N \times M$
3. $C := N \times \{0\}$
4. $D := \{N\} \times \{0\}$
5. $E := Pow(N)$
6. $F := Pow(N) \times \{0\}$
7. $G := Pow(\emptyset)$
8. $H := Pow(Pow(\emptyset))$

Aufgabe 4 (Aussagen)
Es seien $A := \{a, b, c, d, e\}$ und $B := \{M : \ M \subseteq A\}$. Überprüfen Sie die Korrektheit der folgenden Aussagen:

1. $a \in B$
2. $\{b\} \in B$
3. $\{a\} \in A$
4. $A \in B$
5. $A \subseteq B$
6. $\{a\} \subseteq A$
7. $\emptyset \in A$
8. $\emptyset \subseteq A$
9. $\{\emptyset\} \subseteq A$
10. $\emptyset \in B$
11. $\emptyset \subseteq B$
12. $\{\emptyset\} \subseteq B$

Aufgabe 5 (Vollständige Induktion)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittel vollständiger Induktion.

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $n^2 + n$ ist gerade.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: Es gibt eine Primzahl, die n teilt.

Aufgabe 6 (Folgen)

1. Sie möchten das Spiel „Papier, Stein, Schere“ modellieren. Ein Spiel ist gewonnen, sobald ein Spieler drei Runden gewonnen hat. Eine Runde besteht aus einer Aktion von zwei Spielern. Nach 20 Runden gilt ein Spiel als unentschieden.

   Definieren Sie die Menge aller Folgen, die die aufeinander folgenden Runden modellieren.
2. Modellieren Sie möglichst genau alle möglichen Ergebnisse der Lotto-Ziehungen (ohne Super- oder Zusatzzahl) mit den aus der Vorlesung bekannten Mitteln.

Aufgabe 7 (Modellierung)

1. Im Südring-Zentrum haben die drei Lebensmittelgeschäfte Minipreis, Aldi und Real folgende Gemüse-Produkte im Angebot:
   - Minipreis: Gurke, Kopfsalat, Tomaten
   - Aldi: Gurke, Möhren, Kohlrabi
   - Real: Kohlrabi, Tomaten, Möhren

   a) Geben Sie die Menge *GemüseAngebote* an, die alle Gemüse-Produkte enthält, die es im Südring im Angebot gibt.

   b) Am Ende jedes Monats möchten die drei Läden anhand von Kennzahlen vergleichen, wer wie viel Gemüse im Südring verkauft hat. Geben Sie eine gute Modellierung an.
2. Nachfolgend soll das Angebot einer Imbissbude modelliert werden. Geben Sie Definitionen für **alle** benutzten Mengen (außer $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, usw.) an.

   a) Als Getränke werden Cola, Fanta und Wasser angeboten. Alle Getränke gibt es in drei verschiedenen Bechergrößen, nämlich klein, mittel und groß. Man kann wählen, ob man sein Getränke mit oder ohne Eis möchte. Geben Sie die Menge der erhältlichen *Getränke* an. Welches Element repräsentiert eine große Fanta mit Eis?

   b) In einem Burger befinden sich übereinandergestapelte Lagen aus Fleisch, Gurke und Käse. Die Reihenfolge ist wichtig und es dürfen Zutaten mehrfach vorkommen. Geben Sie die Menge des Inhalts von *Burger*n an. Welches Element repräsentiert einen Burger bestehend aus Käse, zwei Lagen Fleisch und einer Lage Gurke?

c) Neben den in (a) und (b) beschriebenen Lebensmittel werden Pommes mit Ketchup oder Mayo angeboten. Geben Sie eine Menge an, die alle erhältlichen *Lebensmittel* enthält.

d) Der Laden führt eine *Strichliste*, welche Lebensmittel wie oft verkauft wurden. Geben Sie eine Menge an, die solche Verkaufsergebnisse modelliert.

e) Thomas, Carsten und Jochen wollen in der Imbissbude etwas bestellen. Geben Sie eine Menge *Bestellungen* an, die alle Bestellungen enthält, die die drei aufgeben könnten.