Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

01. Januar 2016

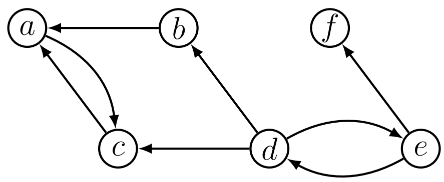
Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 9
Abgabe: 11. Januar 2016 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel enthält 6 Aufgaben mit insgesamt 28 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Graphen,transitive Hülle) (3 Punkte)
Die transitive Hülle eines (gerichteten) Graphen G ist der Graph G', in dem zwei Knoten u und v durch eine (gerichtete) Kante verbunden sind genau dann, wenn es in G einen Weg von u nach v gibt.

1. Zeichnen Sie die transitive Hülle des folgenden Graphen:



2. Sei G ein stark zusammenhängender, gerichteter Graph mit n Knoten. Um welchen Graphen handelt es sich bei dem der transitiven Hülle von G zugrunde liegendem ungerichteten Graphen?

Aufgabe 2 (Starke Zusammenhangskomponenten) (3 Punkte)
Gegeben sei der Graph $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V = \{ \quad & 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \quad \} \\ E = \{ \quad & (1,2), (1,3), (1,7), (2,4), (2,5), (3,4), (3,7), \\ & (4,2), (4,5), (5,2), (6,3), (6,7), (7,1), (7,4) \quad \} \end{aligned}$$

Geben Sie zunächst alle starken Zusammenhangskomponenten[1] von G. Ändern Sie dann *die Richtung* genau einer Kante aus G so, dass der entstehende Graph G' genau zwei starke Zusammenhangskomponenten enthält. Geben Sie die entsprechende Kante und die zwei Zusammenhangskomponenten von G' an.

Aufgabe 3 (Beweis) (4 Punkte)

[1] Für die Definition starker Zusammenhangskomponenten siehe Präsenzübungsblatt 9, Aufgabe 2

Ein k-ärer Baum sei ein Baum in dem jeder Knoten maximal k Kinder haben kann. Zeigen Sie, dass ein vollständiger k-ärer Baum der Höhe n genau

$$\frac{k^{n+1}-1}{k-1}$$

Knoten besitzt.

Aufgabe 4 (Beweise) (9 Punkte)

1. Gegeben sei ein gerichteter, kreisfreier Graph $G = (V, E)$.

   Zeigen Sie, dass G einen Knoten mit Eingangsgrad 0 besitzt.

2. Beweisen Sie folgende Aussage:
   Ein gerichteter Graph G ist genau dann kreisfrei, wenn es eine topologische Sortierung für G gibt.
   Tipp: Führen Sie für die Richtung „ kreisfrei $\Rightarrow$ Sortierung “ einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Knoten. Verwenden Sie das Ergebnis aus (a) um in dem Induktionsschritt einen geeigneten Knoten aus dem Graphen zu entfernen.

Aufgabe 5 (Abhängigkeitsgraph) (5 Punkte)
Ein Koch serviert seinen Gästen klassische Pasta mit Tomatensauce. Hierbei sind die Arbeitsschritte A_1 bis A_8 nötig, die der Koch mit seinem Team erledigt. Dabei ist die Reihenfolge der Ausführung der einzelnen Arbeitsschritte zu beachten.

A_1 Tisch decken, Dauer: 6 Minuten

A_2 Wasser zum Kochen bringen, Dauer: 5 Minuten

A_3 Nudeln in kochendem Wasser kochen, Dauer: 9 Minuten

A_4 Tomaten waschen, Tomaten und Zwiebeln schneiden, Dauer: 8 Minuten

A_5 Tomatensauce abschmecken, Dauer: 1 Minute

A_6 Tomatensauce kochen, Dauer: 15 Minuten

A_7 Essen servieren, Dauer: 3 Minuten

A_8 Töpfe Abwaschen, Dauer: 15 Minuten

1. Modellieren Sie die Abhängigkeiten zwischen den Aktionen und ihre Ausführungsreihenfolgen durch einen gerichteten Graphen $G = (V, A)$ mit weniger als 10 Kanten. Geben Sie eine Knotenmarkierung $m : V \to \mathbb{N}$ an, die die Dauer der jeweiligen Aktionen beschreibt.

2. Geben Sie eine topologische Sortierung des Graphen an.

3. Geben Sie den kritischen Pfad des Graphen nach der erweiterten Definition aus Präsenzübung 9, Aufgabe 4 an.

4. Berechnen Sie die Zeit die mindestens benötigt wird, bis das Essen serviert werden kann.

Aufgabe 6 (Graphen, Modellierung) (4 Punkte)
In einem kleinen Dorf nehmen an einem Tanzkurs die drei Frauen Anita, Berta und Christina und die vier Männer Detlef, Ernst, Franz und Gerhardt teil. Anita ist die Exfrau von Franz. Christina war schon mit Ernst und Gerhardt verheiratet. Es wird in Runden getanzt. Dabei ist während einer Runde kein Partnerwechsel möglich und es sollen nur gemischt-geschlechtliche Paare tanzen. Geschiedene Paare tanzen grundsätzlich nicht zusammen.

1. Modellieren Sie das Problem als Graphenproblem und zeichnen Sie dazu den Graphen. Welche spezielle Eigenschaft hat der Graph? Durch welchen Begriff kann in diesem Graphen eine Tanzrunde modelliert werden?

2. Besteht die Möglichkeit, dass in einer Runde alle Frauen tanzen? Welchen Satz kann man im Allgemeinen zur Beantwortung dieser Frage anwenden.