Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

11. Dezember 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 8
Abgabe: 21. Dezember 2015 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel besteht aus 5 Aufgaben mit insgesamt 33 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Beweis) (8 Punkte)

1. Ein Schnittknoten eines Graphen ist ein Knoten, dessen Entfernen zu einem Graphen führt, der mehr Zusammenhangskomponenten enthält als der ursprüngliche Graph.

   Sei V eine beliebige Menge und $\mathcal{G} = \left\{ G \;\middle|\; G = (V,E) \land E \subseteq \binom{V}{2} \right\}$, die Menge aller Graphen mit Knotenmenge V. Gegeben seien die Funktionen $zk : \mathcal{G} \to \mathbb{N}$ und $tg : \mathcal{G} \times Pow(V) \to \mathcal{G}$. Dabei bildet zk einen Graphen auf die Anzahl der Zusammenhangskomponteten dieses Graphen ab. Die Funktion tg bildet einen Graphen $G = (V,E)$ und eine Knotenmenge V' auf den von $V' \cap V$ induzierten Teilgraphen ab.

   Geben Sie für einen Graphen $G = (V,E)$ unter Verwendung von zk und tg eine intensionale Darstellung der Menge der Schnittknoten an.

2. Es sei $G = (V,E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   a) $v \in V$ ist ein Schnittknoten.

   b) $\exists a, b \in V \setminus \{v\}$ mit $a \neq b$, so dass jeder Weg in G von a nach b über v geht.

   c) $\exists A, B \subseteq V$ mit $A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$ und $A \cup B = V \setminus \{v\}$ und jeder Weg von $a \in A$ nach $b \in B$ enthält v.

Aufgabe 2 (Graphen,Matching) (5 Punkte)
Gegeben seien die Graphen

- $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ und

  $$E_1 = \{\{a,d\},\{f,b\},\{c,b\},\{d,c\},\{a,g\},\{f,g\},\\ \{e,a\},\{f,e\},\{c,e\},\{f,d\},\{c,g\},\{h,d\},\{h,e\}\}$$

- $G_2 = (V_1, E_2)$ mit

  $$E_2 = \{\{d,g\},\{b,e\},\{g,a\},\{c,f\},\{a,c\},\{d,e\},\{e,a\},\{b,f\},\{f,d\}\}$$

1. Zeichnen sie die Graphen.
2. Bei welcher der folgenden Mengen handelt es sich jeweils um ein Matching?
   a) $M_1 \cap E_1$ und $M_1 \cap E_2$ mit $M_1 = \{\{a,d\},\{c,b\},\{f,g\},\{f,e\},\{f,b\}\}$
   b) $M_2 \cap E_1$ und $M_2 \cap E_2$ mit $M_2 = \{\{g,a\},\{b,e\},\{a,d\}\}$
3. Geben sie jeweils ein perfektes Matching der Graphen an, falls ein solches existiert.
4. Welcher der Graphen ist bipartit? Zerlegen Sie gegebenenfalls die Knotenmenge in entsprechende disunkte Teilmengen.
5. Geben Sie jeweils die chromatische Zahl und eine entsprechende Färbung der Graphen an.

Aufgabe 3 (Modellierung) (5 Punkte)
Für sieben Vorlesungen stehen am Semesterende Abschlussklausuren an. Bei der Terminplanung ist darauf zu achten, dass kein Student mehr als eine Klausur pro Tag schreibt. Ein „+"-Eintrag im Feld (i, j) untenstehender Tabelle bedeutet, dass die Vorlesungen i und j mindestens einen Studenten gemeinsam haben - die Klausuren für diese Vorlesungen dürfen also nicht am selben Tag stattfinden.

	1	2	3	4	5	6	7
1		+		+		+	
2	+		+		+		
3		+		+			+
4	+		+			+	
5		+					+
6	+			+			
7			+		+		

1. Durch welches graphentheoretische Problem lässt sich die beschriebene Aufgabe modellieren? Zeichnen Sie den in ihrer Modellierung zur Tabelle gehörenden Graphen.
2. Wie viele Tage sind zur Durchführung aller Klausuren mindestens notwendig?
3. Geben Sie einen möglichen Terminplan an.

Aufgabe 4 (Graphen,Beweisen) (7 Punkte)
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| > 1$.

1. Beweisen Sie: Wenn G ein Baum ist dann hat jeder Knoten Grad mindestens 1 und für die Summe aller Knotengrade gilt
$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2(|V| - 1).$$
   Beweisen Sie die zweite Eigenschaft durch einen Induktionsbeweis über die Anzahl der Knoten.

   Tipp: Überlegen Sie was passiert, wenn Sie einen geeigneten Knoten aus einem Baum entfernen.

2. Für welche der zu zeigenden Eigenschaften ist die Bedingungen $|V| > 1$ wichtig?

3. Gilt auch ein „genau dann wenn"? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 5 (Graphen, Beweisen) (8 Punkte)
Der Durchmesser eines Graphen ist die Länge des längsten kürzesten Weges zwischen zwei Knoten im Graphen.

Definition 5.1 (Durchmesser) *Sei $G = (V, E)$ ein Graph.*
Der Durchmesser *des Graphen G ist gegeben durch*

$$\operatorname{diam}(G) = \max\left\{d(u, v) \mid u, v \in V\right\} \ ,$$

wobei für alle $u, v \in V$

$$d(u, v) = \min\left\{l \in \mathbb{N} \,|\, \textit{Es gibt einen Weg der Länge } l \textit{ von } u \textit{ nach } v \textit{ in } G\right\}.$$

Beweisen Sie per Induktion über d:

$$\operatorname{diam}(Q_d) = d.$$

Hinweis: Q_d bezeichnet den d-dimensionalen Hyperwürfel.