Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

04. Dezember 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 7
Abgabe: 14. Dezember 2015 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel besteht aus 6 Aufgaben mit insgesamt 31 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Signatur ergänzen) (4 Punkte)
Auf Zeichenketten sind viele Operationen definiert. Einige davon sind:

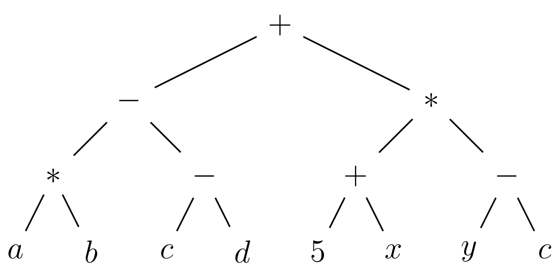
- *emptyString* ist eine 0-stellige Operation, die eine leere Zeichenkette erzeugt.
- *addChar* liefert die Konkatenation aus einer Zeichenkette und einem Zeichen.
- *length* gibt die Länge der Zeichenkette an.
- *toLowerCase* wandelt alle Großbuchstaben einer Zeichenkette in Kleinbuchstaben um.
- *isSubstring* überprüft, ob eine Zeichenkette in einer anderen Zeichenkette enthalten ist.
- *concat* verkettet zwei Zeichenketten.

Sei die Signatur $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F})$ mit den Sorten

$$\mathcal{S} = \{ \text{ ZEICHENKETTE, ZEICHEN, NAT, BOOL } \}$$

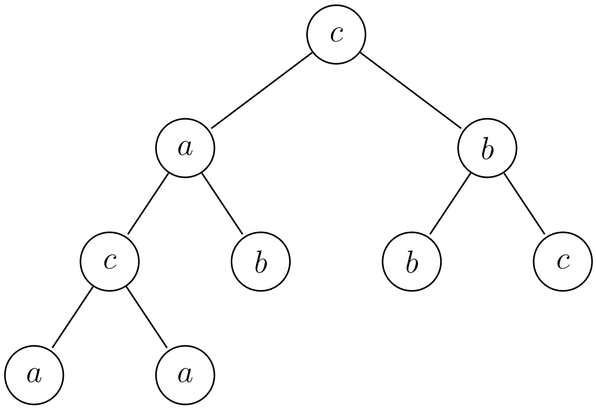
gegeben. Geben Sie die Struktur $\mathcal{F}$ an, die obige Operationen zu $\mathcal{S}$ repräsentiert.

Aufgabe 2 (Termnotation) (3 Punkte)
Geben Sie für den folgenden Term in Baumdarstellung die Infix-, Postfix- und Präfixform an.



Aufgabe 3 (Algebren) (6 Punkte)

Ein Binärbaum ist ein spezieller Baum, bei dem jeder Knoten höchstens zwei Kinder hat.



Die abstrakte Algebra Binärbaum mit der Signatur $\Sigma = (S, F)$ beschreibt einen solchen Baum:

$$
\begin{array}{rlllll}
S & = \{ & \text{BinTree, BOOL, Element} & \} & & \\
F & = \{ & \mathit{create}: & & \to \text{BinTree}, & (F_1) \\
 & & \mathit{node}: & \text{BinTree} \times \text{Element} \times \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_2) \\
 & & \mathit{left}: & \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_3) \\
 & & \mathit{right}: & \text{BinTree} & \to \text{BinTree}, & (F_4) \\
 & & \mathit{value}: & \text{BinTree} & \to \text{Element}, & (F_5) \\
 & & \mathit{empty}: & \text{BinTree} & \to \text{BOOL} \quad \} & (F_6)
\end{array}
$$

Die Sorte *BinTree* stellt einen Binärbaum dar, die Sorte *Element* beschreibt den Inhalt eines Baumknotens. Für die Sorte *BOOL* sind Konstanten *true* und *false* definiert. *create* bezeichnet eine 0 - stellige Operation und ist damit eine Konstante. Sie steht für den leeren Baum. Die Operation *node* erzeugt einen neuen Wurzelknoten und verbindet zwei existierende Bäume als linken und rechten Teilbaum zu einem neuen Baum. Die Operationen *left* bzw. *right* liefern den linken bzw. rechten Teilbaum eines Baums. Die Operation *value* liefert den Inhalt des Wurzelknotens eines Baumes. Die Operation *empty* zeigt an, ob der Baum leer ist oder nicht.

Für die Menge der Axiome Q seien l, r Terme der Sorte *BinTree* und v ein Term der Sorte *Element*.

$$
\begin{array}{llll}
Q = \{ & & & \\
 & Q_1: & \mathit{empty}(\mathit{create}) & \to \mathit{true}, \\
 & Q_2: & \mathit{empty}(\mathit{node}(l, v, r)) & \to \mathit{false}, \\
 & Q_3: & \mathit{left}(\mathit{node}(l, v, r)) & \to l, \\
 & Q_4: & \mathit{right}(\mathit{node}(l, v, r)) & \to r, \\
 & Q_5: & \mathit{value}(\mathit{node}(l, v, r)) & \to v \\
\} & & &
\end{array}
$$

1. Formen Sie die folgenden Terme mit Hilfe der Axiome so um, dass Sie als Ergebnis x, y, z, true oder false erhalten. Notieren Sie bei jeder Umformung das benutzte Axiom.

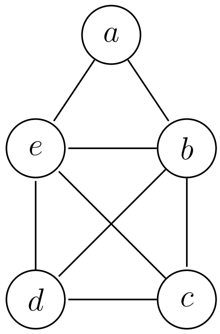
   a) $\mathit{empty}(\mathit{left}(\mathit{right}(\mathit{node}(\mathit{create}, z, \mathit{node}(\mathit{right}(\mathit{node}(\mathit{create}, y, \mathit{create})), x, \mathit{create})))))$

   b) $\mathit{value}(\mathit{right}(\mathit{node}(\mathit{create}, x, \mathit{node}(\mathit{create}, y, \mathit{create}))))$

2. Erweitern Sie die angegebene Algebra um eine Funktion *count*, die die Anzahl der Blätter eines Baum angibt. Ergänzen Sie die nötigen Sorten, die Funktionen mit ihren Signaturen und die Axiome, in den Mengen S, F und Q.

Aufgabe 4 (Darstellungen) (8 Punkte)

Der Nikolaus richtet sich mit folgendem Graphen und einigen Fragen an Sie. . .



1. Stellen Sie den Graph $G = (V, E)$ durch die Angabe der Mengen V und E dar.
2. Bestimmen Sie $\Gamma(a)$, $\Gamma(d)$ und $\deg(d)$.
3. Sei der Graph $H = (V_H, E_H)$ mit $V_H = \{a, e, b\}$ und $E_H = \{\{a, e\}, \{a, b\}\}$ gegeben.
   a) Ist H ein Teilgraph von G?
   b) Ist H ein induzierter Teilgraph von G?
   c) Ist H eine Zusammenhangskomponente von G?
4. Besitzt G einen Eulerkreis? Falls ja, so geben Sie einen Eulerkreis an.
5. Besitzt G einen Eulerweg? Falls ja, so geben Sie einen Eulerweg an.
6. Geben Sie einen Hamiltonkreis des Graphen an.

Aufgabe 5 (Darstellung, Begriffe) (3 Punkte)

Die Kanten eines Graphen G seien durch die folgenden Nachbarschaften von Knoten gegeben:

v	$\Gamma(v)$
1	$\{2, 3\}$
2	$\{1, 4, 5, 7\}$
3	$\{1, 4\}$
4	$\{2, 3, 7\}$
5	$\{2, 6\}$
6	$\{5, 7\}$
7	$\{2, 4, 6\}$

1. Geben Sie die Knotenmenge V und die Kantenmenge E des Graphen G an.
2. Zeichnen Sie den durch die Knotenmenge $\{1, 2, 4, 7\}$ induzierten Teilgraphen von G.

Aufgabe 6 (Modellierung, Begriffe) (7 Punkte)

Kevin-Arne hat eine SHK Stelle beim IMT und bekommt die Aufgabe Rechner zu vernetzen. Das IMT verlangt folgende Eigenschaften des Netzwerkes:

P_0 Von jedem Rechner aus muss jeder andere Rechner über einen Leitungsweg erreichbar sein.

P_1 Auch wenn genau eine Leitung zwischen zwei Rechnern ausfällt, muss jeder Rechner über einen Weg mit jedem anderen Rechner verbunden sein.

P_2 An jedem Rechner können maximal 4 Leitungen angeschlossen werden.

Ein Netzwerk lässt sich leicht als Graph darstellen: ein Knoten repräsentiert einen Rechner, eine Kante eine Leitung. Das IMT besitzt ingesamt n Rechner.

1. Formulieren Sie die Eigenschaften P_0, P_1 und P_2 mit Begriffen der Graphentheorie.

2. Kevin-Arne schlägt vier verschiedene Netzwerke vor. Helfen Sie dem IMT, indem Sie die folgenden Graphen mit $V = \{0, \ldots, n-1\}$ auf ihre Tauglichkeit bezüglich der Eigenschaften P_0, P_1 und P_2 untersuchen.
   a) $G_1 = (V, E_1)$ mit $E_1 = \{\{0, i\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$
   b) $G_2 = (V, E_2)$ mit $E_2 = \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i \leq n-2\}$
   c) $G_3 = (V, E_3)$ mit $E_3 = \{\{i, (i+1) \mod n\} \mid 0 \leq i \leq n-1\}$
   d) $G_4 = (V, E_4)$ mit $E_4 = \{\{i, \lfloor i/2 \rfloor\} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$