Universität Paderborn
Prof. Dr. Johannes Blömer
Prof. Dr. Hans Kleine Büning

20. November 2015

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 5
Abgabe: 30. November 2015 – 14:00 Uhr
(Dieser Übungszettel besteht aus 6 Aufgaben mit insgesamt 32 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Beweisen) (4 Punkte)
Gegeben seien zwei aussagenlogische Formeln α und β.

1. Beweisen Sie: $\alpha \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha \land \neg\beta$ widerspruchsvoll ist.
2. Erklären Sie in eigenen Worten, und mit maximal drei Sätzen, was an dem Ausdruck

$$\alpha \models \beta \approx \alpha \land \neg\beta$$

falsch ist.

Aufgabe 2 (Interpretation) (5 Punkte)
Gegeben sei die folgende prädikatenlogische Interpretation $\Im$:

- $\omega = \mathbb{N} \cup Pow(\mathbb{N})$
- $P^{(2)} \mapsto P_\omega = \{(x, X) \in \mathbb{N} \times Pow(\mathbb{N}) \mid x \in X\}$
- $Q^{(2)} \mapsto Q_\omega = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ggT(x, y) = 1\}$
- $a \mapsto \{1, 2, 3\}$
- $b \mapsto \{1, 4, 5\}$

1. Berechnen Sie die Interpretation der prädikatenlogischen Formel $\alpha = \forall x\ (P(x, a) \rightarrow P(x, b))$. Geben Sie jeden Zwischenschritt an.
2. Es sei $\beta = \forall x\ \forall y\ ((P(x, a) \land P(y, b)) \rightarrow Q(x, y))$. Geben Sie in Worten an, welche Eigenschaften die prädikatenlogische Formel β unter der obigen Interpretation beschreibt.

Aufgabe 3 (Interpretationen, Widerlegungen) (3 Punkte)
Zeigen oder widerlegen Sie folgende Äquivalenzen und semantische Folgerungen.

1. $\forall x \exists y\ P(x,y) \approx \exists y \forall x\ P(x,y)$
2. $(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)) \models \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$
3. $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \approx (\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$

Aufgabe 4 (Interpretation vervollständigen) (6 Punkte)
Gegeben ist eine prädikatenlogische Formel α, ein Grundbereich ω und ggf. eine unvollständige Interpretation $\Im$. Vervollständigen Sie $\Im$ so, dass $\Im(\alpha) = 1$ gilt und begründen Sie, dass $\Im(\alpha) = 1$ gilt.

1. $\alpha = \exists x \forall y \forall z\ P(f(x,y), z)$ mit $\Im : \omega = \mathbb{N}$, $P^{(2)} \mapsto P_\omega = \{(a,b) \in \omega \times \omega | a \leq b\}$.
2. $\beta = \forall x \exists y \forall z\ (P(x,z) \rightarrow (P(y,z) \wedge \neg P(z,y)))$ mit $\omega = \mathbb{R}$
3. $\gamma = \forall x \exists y\ P(f(x,y), c)$ mit
   $\Im : \omega = \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, $c \mapsto 1$,$P^{(2)} \mapsto P_\omega = \{(a,b) \in \omega \times \omega | a = b\}$.

Aufgabe 5 (Beweisen / Widerlegen) (6 Punkte)
Seien α, β, γ und δ beliebige prädikatenlogische Formeln. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $(\forall x\ \alpha) \wedge (\forall x\ \beta) \approx \forall x\ (\alpha \wedge \beta)$
2. $\exists x \forall y\ \alpha \models \forall y \exists x\ \alpha$
3. α erfüllbar $\Leftrightarrow$ $\exists x\ \alpha$ erfüllbar

Aufgabe 6 (Umformungen, pränexe Normalform) (8 Punkte)
Führen Sie für die folgenden prädikatenlogischen Formeln folgende Schritte durch:

- Formen Sie sie in eine äquivalente NNF um.
- Formen Sie die NNF in eine äquivalente PNF um.
- Geben Sie den Kern der PNF an.
- Transformieren Sie die PNF in eine erfüllbarkeitsäquivalente SKNF.
- Transformieren Sie den Kern in KNF.

Geben Sie jeweils in jedem Umformungsschritt die verwendete Umformungsregel an. Kennzeichnen Sie außerdem alle Normalformen wenn sie das erste mal auftreten.

1. $\alpha = (\exists x\ ((P(x)) \vee (\forall x\ (Q(x)) \wedge \forall y\ (R(x)))) \wedge (\exists y\ (S(y)) \vee \neg \forall y\ (E(y))))$
2. $\alpha = \exists x\ (P(x) \wedge (\forall x\ Q(x) \wedge \forall y\ R(x))) \rightarrow (\exists y\ S(y) \wedge \neg \forall y\ T(y))$