

Modellierung – WS 2015/2016

Heimübung 4

Abgabe: 23. November 2015 – 14:00 Uhr

(Dieser Übungszettel besteht aus 6 Aufgaben mit insgesamt 34 Punkten)

Hinweis: Die Lösungen der Hausaufgaben sind in die Kästen im D3-Flur einzuwerfen. Bilden Sie bitte **innerhalb** ihrer Übungsgruppe Gruppen von 3-4 Personen zur Lösung der Aufgaben. Die Lösung muss die Namen und Matrikelnummern derjenigen enthalten, die die Aufgaben gelöst haben, sowie die **Übungsgruppennummer**. Nicht getackerte Abgaben werden nicht korrigiert.

Aufgabe 1 (Äquivalenz) (6 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Formeln jeweils an, ob diese erfüllbarkeits-äquivalent oder äquivalent sind. Beweisen Sie Ihre Antwort in geeigneter Weise.

1. $\alpha = ((A \vee D) \leftrightarrow ((A \vee \neg B) \wedge C)) \rightarrow B$ und $\beta = (A \vee B) \wedge (C \vee \neg A)$
2. $\alpha = (A \vee \neg B) \rightarrow (\neg C \wedge \neg E)$ und $\beta = \neg A \wedge B \vee \neg(C \vee E)$
3. $\alpha = ((A \vee B) \rightarrow C) \wedge \neg(C \vee \neg A \vee \neg B)$ und $\beta = ((A \vee B) \rightarrow C) \wedge D \wedge \neg(\neg C \vee \neg A \vee \neg B)$

Aufgabe 2 (Äquivalenz) (6 Punkte)

Seien α, β, γ beliebige aussagenlogische Formeln. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beweisen Sie Ihre Antwort in geeigneter Weise.

1. $\alpha \approx true$ oder $\alpha \approx false$
2. Entweder $\alpha \approx_{sat} true$ oder $\alpha \approx_{sat} false$
3. Aus $\alpha \approx \beta$ folgt $\alpha \approx_{sat} \beta$
4. \approx_{sat} ist eine Äquivalenzrelation
5. Aus $\alpha \approx_{sat} \beta$ und $\beta \approx \gamma$ folgt $\alpha \approx \gamma$.
6. Aus $\alpha \approx_{sat} \beta$ und $\beta \approx \gamma$ folgt $\alpha \approx_{sat} \gamma$.

Aufgabe 3 (Transformation, PS-Graphen) (4 Punkte)

Gegeben ist die aussagenlogische Formel

$$\alpha = \beta \leftrightarrow \gamma$$

wobei

$$\beta = A \vee B \vee C$$

und

$$\gamma = E \vee ((C \wedge (B \vee A)) \rightarrow D) .$$

1. Transformieren Sie α schrittweise in NNF: Überführen Sie erst die Teilformeln β und γ jeweils in NNF. Nutzen Sie diese Darstellungen dann, um α in NNF darzustellen.
2. Stellen Sie dann den dazugehörigen PS-Graphen auf. Führen Sie dabei in jedem Schritt nur eine Ersetzung durch und kreisen Sie die durchgeführten Änderungen ein.
3. Generieren Sie dann eine Formel in KNF, die erfüllbarkeits-äquivalent zu der Ausgangsformel ist.

Aufgabe 4 (Modellierung, Resolution)

(6 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Elementaraussagen:

- *Mo*: Es ist Montag
- *Di*: Es ist Dienstag
- *Mi*: Es ist Mittwoch
- *Do*: Es ist Donnerstag
- *Fr*: Es ist Freitag
- *C*: Es gibt Currywurst
- *T*: Es gibt Teufelsrösti
- *M*: Es gibt Milchreis
- *P*: Paul geht in die Mensa
- *K*: Kevin-Arne geht in die Mensa
- *J*: Jasmin geht in die Mensa

1. Formalisieren Sie die folgenden Aussagen:

- a) Jasmin geht in die Mensa, wenn Paul in die Mensa geht oder wenn es Milchreis gibt.
- b) Jasmin hat dienstags Vorlesung und geht darum dienstags nicht in die Mensa.
- c) Freitags gibt es in der Mensa immer Currywurst.
- d) Paul geht in die Mensa, falls es Currywurst gibt.
- e) Kevin-Arne geht genau dann in die Mensa, wenn Paul nicht in die Mensa geht.
- f) Wenn es Milchreis und Teufelsrösti gibt, dann ist Mittwoch.

2. Zeigen Sie:

- a) Die Aussage „Dienstags geht Kevin-Arne in die Mensa.“ folgt semantisch aus den obigen Aussagen.
- b) Die Aussage „Es ist Freitag und Kevin-Arne und Jasmin treffen sich in der Mensa.“ ist zusammen mit den obigen Aussagen widerspruchsvoll.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Stellen Sie die benötigte Formel auf und transformieren Sie diese in NNF.
- Transformieren Sie die Formel, falls möglich, in eine äquivalente Horn-Formel, ansonsten in KNF.
- Wenden Sie, falls möglich, das Unit-Resolutionsverfahren an, ansonsten das normale Resolutionsverfahren.

Aufgabe 5 (Prädikatenlogische Formeln) (9 Punkte)

Seien $KS = \{a, b, c\}$, $FS = \{f, g, h\}$, $V = \{x, y, z, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und $PS = \{P, Q, R, P_1\}$ die Mengen der Individuenkonstanten, Funktionssymbole, Individuenvariablen und Prädikatssymbole. Gegeben seien die folgenden Ausdrücke:

1. $((\neg Q(x_1, z, y)) \wedge Q(x_2, x_3, x_4)) \vee P(g(b, g(x_1)), f(y))$
2. $Q(f(a)) \wedge \neg P(f(x, y))$
3. $\left(\left((\forall x P(x_1, x_2, x_3) \wedge (\neg P(x, z, y))) \right) \vee \left(\exists x Q(g(f(x), a), f(y)) \right) \right)$
4. $(\exists x (\forall y, z P(x, y, z) \wedge \neg Q(z)))$
5. $(\exists x (\forall y P(y, x) \wedge \forall a P(x, a)))$

Bearbeiten Sie für jede Formel jeweils die folgenden Teilaufgaben und begründen Sie Ihre Antworten:

- Handelt es sich um eine Formel in PL1? Falls ja:
 - Wie lautet die Signatur Σ der Formel?
 - Wie lautet die Menge der Literale der Formel?
 - Wie lauten die Mengen $freevars(\alpha)$ und $boundvars(\alpha)$ der Formel?
 - Wie lautet die Menge der Terme?
 - Handelt es sich um eine geschlossene Formel?
 - Ist die Formel konsistent umbenannt?
 - Falls die Formel nicht konsistent umbenannt ist, überführen Sie die Formel in eine konsistent umbenannte Formel.
 - Entfernen Sie alle nicht benötigten Klammern der Formel.
 - Geben Sie eine mögliche Interpretation auf einem geeignet gewählten Grundbereich ω an, indem Sie den Elementen aus Σ und V entsprechende Objekte der richtigen Stelligkeit über ω zuordnen.

Aufgabe 6 (Interpretation) (3 Punkte)

Erklären Sie in eigenen Worten und mit maximal drei Sätzen, was es inhaltlich bedeutet, eine prädikatenlogische Formel zu interpretieren.